Egy szinguláris nemlinearitást tartalmazó peremértékprobléma megoldásainak száma

Tudományos Diákköri Dolgozat

Írta: Horváth Tamás

Alkalmazott matematikus szak, V.

Témavezető:

Dr. Simon Péter, egyetemi docens
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2007

Tartalomjegyzék

Kivonat

Dolgozatom célja meghatározni az $u'' - u^{-\gamma} + \beta = 0$, $u(-R) = u(R) = 0$ peremértékprobléma pontos megoldásszámát. Megmutatom, hogy a pontos megoldásszám 2, 1 vagy 0, γ-tól és R-től függően, ezzel megoldva néhány problémát, melyet Choi, Lazer és McKenna vetettek fel. Vizsgálataim során meghatározom a visszatérési leképezés értelmezési tartományát, monotonitását, határértékét, melyeket egy megfelelő integrálformula becslésével kapok.

1. Bevezetés

A dolgozat célja meghatározni az alábbi peremértékprobléma pozitív megoldásainak számát:

$$\begin{gathered} u'' + f(u) = 0 \\ u(-R) = u(R) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

ahol $f(u) = -\frac{1}{u^\gamma} + \beta$, $\gamma \in (0,1)$ és $\beta > 0$.

Ezzel a peremértékproblémával legelőször Diaz és társai foglalkoztak ([2]) sokkal általánosabb vonatkozásban. β abban a cikkben függött a tér változótól, x-től is és a feladat egy korlátos tartományon volt kitűzve $\mathbb{R}^n$-ben. Belátták, hogy ha a feladatnak létezik megoldása, akkor létezik maximális megoldása is, valamint vizsgálták az energetikai funkcionál szélsőértékeinek és a maximális megoldásnak a kapcsolatát.

A $\beta(x) = \beta$ esetben azt látták be, hogy létezik egy $\beta^* > 0$ melyre az igaz, hogy ha $\beta < \beta^*$ akkor nem létezik megoldás, ha pedig $\beta > \beta^*$ akkor létezik megoldás.

Később Choi, Lazer és McKenna foglalkozott a kérdéssel [1]. Az n dimenziós eset kapcsán belátták, hogy $\gamma \geq 1$ esetén nem létezik megoldása. Valamint azt is belátták, hogy legfeljebb két dimenzióban $\beta = \beta^*$ esetén is létezik megoldása a feladatnak. Az egydimenziós eset kapcsán (mely nem más mint az (1) közönséges differenciálegyenlet) bebizonyították, hogy ha $0 < \gamma < 1/3$ akkor létezik $R_1 < R_2$ úgy, hogy minden $R \in (R_1, R_2)$ esetén legalább két megoldás van és $R = R_1$ esetén is van legalább egy megoldás. Valamint azt is bizonyították, hogy $\gamma = 1/2$ esetén amennyiben létezik megoldás, akkor ez egyértelmű.

[1]-ben több problémát is felvetettek, ezek közül háromra fogunk választ adni:

- Meg tud-e valaki határozni egy kritikus kitevőt, γ^*-ot, ami felett a megoldás egyértelmű?
- A kritikus kitevő alatt minden esetben több megoldást létezik?
- A megoldások maximális száma kettő, vagy előfordulhat-e több megoldás?

A következő tételt fogjuk a dolgozatban bizonyítani:

1. Tétel *Legyen* $R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^{-1/2-1/2\gamma}(1-\gamma)^{-1/2\gamma}\int_0^1(t^{1-\gamma}-t)^{-1/2}\,dt$. *Amennyiben* $1/2 \leq \gamma < 1$ *akkor* $R < R_0$ *esetén nincs megoldás,* $R \geq R_0$ *esetén pedig a megoldás egyértelmű.* $0 < \gamma < 1/2$ *esetén létezik* $R_{min} < R_0$ *úgy hogy* $R < R_{min}$ *esetén nincs megoldás,* $R = R_{min}$ *esetén létezik egyértelmű megoldás,* $R \in (R_{min}, R_0]$ *esetén pontosan két megoldás létezik,* $R > R_0$ *esetén ismételten egyértelmű megoldást kapunk.*

Ezek alapján a fenti kérdéseket meg tudjuk válaszolni:

- A kritikus kitevő, mely felett a megoldás egyértelmű, nem más mint az 1/2.
- Igen, a kritikus kitevő alatt minden esetben több megoldást létezik.
- Igen, a megoldások maximális száma kettő, több megoldást egyetlen esetben sem kaphatunk.

A bizonyítás az ún. célbalövéses módszeren (az angol nyelvű szakirodalomban shooting method) alapul. Definiáljuk a T visszatérési leképezést (az angol nyelvű szakirodalomban time-map) a következő módon: egy adott $p > 0$-ra tekintsük (1) azon u megoldását, mely eleget tesz az $u(0) = p$,$u'(0) = 0$ kezdeti feltételeknek, és T a p-hez rendelje hozzá u első gyökét. Ezzel az kapjuk, hogy $u(T(p)) = 0$. u pontosan akkor lesz az (1) peremértékprobléma pozitív megoldása, ha $T(p) = R$. Vagyis a peremértékprobléma pozitív megoldásainak száma megegyezik a $T(p) = R$ egyenlet megoldásainak számával. Ahhoz, hogy ez utóbbit meghatározzuk a visszatérési leképezés következő tulajdonságait kell megállapítanunk: értelmezési tartomány, határérték az értelmezési tartomány határain és a monotonitás.

A második szakaszban bemutatjuk azokat az eszközöket, melyeket felhasználunk a visszatérési leképezés jellemzéséhez. A 3. szakaszban megmutatjuk, hogy T értelmezési tartománya egy félegyenes $(p_\gamma, +\infty)$, és $T(p) \to +\infty$ ahogy $p \to +\infty$. Azt is belátjuk, hogy T-nek legfeljebb egy lokális szélsőértéke lehet, mégpedig egy minimuma. Ezek a tulajdonságok általánosabb nemlineáris f-re is beláthatóak, melyek magukba foglalják $\beta - id^{-\gamma}$-t is. f pontos alakja csak a 4. szakaszban kap szerepet, ahol belátjuk, hogy miként függ $T'(p_\gamma)$ értéke γ-tól. Azaz belátjuk, hogy $\gamma < 1/2$ esetén negatív, $\gamma = 1/2$ esetén nulla, $\gamma > 1/2$ esetén pedig pozitív. Ezek felhasználásával egyszerűen bizonyíthatjuk Tételünket.

2. A visszatérési leképezés

Egyszerűen megmutatható (ld. Függelék) hogy (1) minden pozitív megoldása radiálisan szimmetrikus, így eleget tesz a következőknek:

$$\begin{aligned} &u''(r) + f(u(r)) = 0 \\ &u'(0) = 0, \;\; u(R) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

és fennáll az is, hogy:

$$u'(r) < 0 \;\; \text{minden } 0 < r < R. \tag{3}$$

Jelöljük $u(r,p)$-vel azokat az $u(r$ megoldásokat, melyekre $u(0) = p$. Alkalmazzuk a célbalövéses módszert, ami az alábbi kezdeti érték problémát kielégítő $u(\cdot,p)$ vizsgálatát jelenti:

$$\begin{gathered} u''(r,p) + f(u(r,p)) = 0 \\ u(0,p) = p, \;\; u'(0,p) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Definiáljuk a visszatérési leképezést, ahogy azt fent ismertettük:

$$T(p) = sup\{r > 0 : u(s,p) > 0, \forall s \in [0,r)\},$$

azaz $T(p)$ nem más, mint $u(\cdot,p)$ első gyöke. Belátható (ld. Függelék) hogy bevezetve az $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ jelölést $T(p)$-t definiálhatjuk egy integrállal is:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}}\, ds. \tag{5}$$

Felhasználva a fenti integrál reprezentációt belátható, hogy T folytonosan differenciálható. ([1] [3]).

A definíció értelmében T eleget tesz a következő egyenletnek:

$$u(T(p),p) \equiv 0 \tag{6}$$

és $u(r,p) > 0$ ha $r \in [0, T(p))$.

Differenciálva (6)-t a következő egyenletet kapjuk T deriváltjára:

$$\partial_r u(T(p),p)T'(p) + \partial_p u(T(p),p) \equiv 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\partial_r^2 u(T(p),p)T'(p)^2 + 2\partial_{rp} u(T(p),p)T'(p) + \\ &\partial_r u(T(p),p)T''(p) + \partial_p^2 u(T(p),p) \equiv 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Differenciálva (4)-t p szerint, és bevezetve a $h(r,p) = \partial_p u(r,p)$ és $z(r,p) = \partial_p^2 u(r,p)$ jelöléseket azt kapjuk, hogy:

$$\begin{gathered} h''(r,p) + f'(u(r,p))h(r,p) = 0 \\ h(0,p) = 1, \;\; h'(0,p) = 0; \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} z''(r,p) + f'(u(r,p))z(r,p) + f''(u(r,p))h^2(r,p) = 0 \\ z(0,p) = 0, \;\; z'(0,p) = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Differenciálva (4)-t r szerint, és bevezetve a $v(r,p) = \partial_r u(r,p)$ jelöléseket azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} v''(r,p) + f'(u(r,p))v(r,p) = 0 \\ v(0,p) = 0,\ v'(0,p) = -f(p). \end{aligned} \tag{11}$$

Ezeket felhasználva (7) így irható:

$$v(T(p),p)T'(p) + h(T(p),p) \equiv 0\,. \tag{12}$$

3. A visszatérési leképezés jellemzése

Először meghatározzuk T értelmezési tartományát, ehhez használjuk a következő Hamilton függvényt:

$$H(r) := \frac{u'(r)^2}{2} + F(u(r)). \tag{13}$$

Ahol $F(u) := \int_0^u f(t)dt$.

$H'(r) = u'(r)u''(r) + f(u(r))u'(r) = u'(r)u''(r) - u''(r)u'(r) = 0$, azaz H konstans függvény.

1 Lemma
- *Tetszőleges f nemlineáris függvény esetén a visszatérési leképezés értelmezési tartománya:* $D(T) = P_f := \{p > 0 : F(p) > F(s)\ \forall s \in (0,p)\}$
- *Ha* $f(u) = \beta - u^{-\gamma}$, *akkor* $D(T) = [p_\gamma, +\infty)$, *ahol* $p_\gamma = \left(\frac{1}{\beta(1-\gamma)}\right)^{1/\gamma}$

Bizonyítás. Legyen $p \in D(T)$ és $s \in (0,p)$. Ekkor létezik $r \in (0, T(p))$ hogy $u(r) = s$. Ezzel:

$$F(s) = F(u(r)) = H(r) - \frac{u'(r)^2}{2} < H(r) = H(0) = F(p).$$

Most legyen $p \in P_f$ és az egyszerűség kedvéért jelöljük $u(r)$-rel $u(r,p)$-t. Belátjuk, hogy létezik $R > 0$ úgy, hogy $u(R) = 0$, azaz $p \in D(T)$. Indirekt tegyük fel, hogy $u(r) > 0$ minden $r > 0$ esetén. Könnyen látható, hogy $f(p) > 0$ mert $p \in P_f$, azaz $u''(0) < 0$, ennek következtében $u'(r) < 0$ kicsi r-ekre. Felhasználva, hogy H konstans, és $p \in P_f$, (13) segítségével azt kapjuk, hogy $u'(r) < 0$ minden $r > 0$ esetén. Azaz létezik $\lim_\infty u =: c \in [0,p)$, és (13) alapján $F(c) = F(p)$, ami ellentmond annak, hogy $p \in P_f$.

Most lássuk a második pontot. Egyszerű integrálással látszik, hogy $F(u) = \beta u - u^{1-\gamma}/(1-\gamma)$. f egyetlen gyöke $f_\gamma := \beta^{-1/\gamma}$, és f $(0, f_\gamma)$-n negatív, (f_γ, ∞)-n pozitív, így F szigorúan monoton csökken f_γ-ig, majd pedig szigorúan monoton nő. $F(0) = 0$, így könnyű látni, hogy $p \in P_f$ pontosan akkor áll fent, ha p nem kisebb mint F második gyöke, ami p_γ.

□

A visszatérési leképezés határértékét a következő lemma segítségével kapjuk meg:

2 Lemma *Ha f felülről korlátos akkor* $\lim_{p\to\infty} T(p) = \infty$.

Bizonyítás. Integrálva (1)-et azt kapjuk, hogy

$$-u'(r) = \int_0^r f(u(s))ds. \tag{14}$$

Integrálva (14)-et $[0, r]$-en és felhasználva, hogy $f(r) < \beta$ minden $r > 0$-ra azt kapjuk, hogy:

$$u(r) \geq p - \frac{\beta r^2}{2}$$

ahol $p = u(0)$. Azaz u első gyöke nagyobb mint a jobboldali parabola első gyöke, ami azt jelenti, hogy $T(p) \geq \sqrt{2p/\beta}$ és a jobboldali kifejezés ∞-hez tart, ahogy $p \to \infty$, így $T(p)$ is ∞-hez tart.

□

Végül vizsgáljuk meg a visszatérési leképezés monotonitását.

3 Lemma *Ha f konkáv függvény, akkor $T'(p) = 0$ esetén $T''(p) > 0$.*

Bizonyítás. Felhasználva (12)-öt azt kapjuk, hogy $T'(p) = 0$-ból $h(T(p), p) = 0$ következik. Belátjuk, hogy $h(r, p) > 0$ minden $r \in [0, T(p))$ esetén. Ellenkező esetben felhasználva a Sturm szeparációs tételt (ld.: Függelék) azt kapnánk, hogy v-nek lenne egy gyöke h előző gyöke, és $T(p)$ között, mert v és h ugyanannak az egyenletnek a két megoldása (9). Ez viszont ellentmond (3)-nak, ugyanis $v = \partial_r u$ végig negatív $(0, R)$-en.

Ebből azt kapjuk, hogy $z(T(p), p) < 0$ (10) minden megoldására. $f''(p) < 0$ így $z''(0) = -f''(p) > 0$-ból azt kapjuk, hogy $z > 0$ a 0 egy jobboldali környezetében. Tegyük fel, hogy $z(r_1) = 0$ valamely $r_1 \in (0, T(p)]$-re. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenleteket:

$$h'' + f'(u)h = 0 \quad \text{és} \quad z'' + \left(f'(u) + \frac{f''(u)h^2}{z}\right) z = 0$$

ezekből azt kapjuk, hogy h-nak van gyöke $(0, r_1)$-ben (ld.: Függelék) ami nem lehetséges. Így $z > 0$ $(0, T(p)]$-ben.

Végül $z(T(p), p) > 0$ azt eredményezi, hogy $T''(p) > 0$ felhasználva (8)-at (és azt hogy $v(T(p), p) < 0$).

□

1 Megjegyzés *A Lemma azt jelenti, hogy T-nek legfeljebb egy lokális szélsőértéke lehet, mégpedig egy lokális minimuma.*

Itt jegyezzük meg, hogy a fentiekhez hasonló lemmákat bizonyított Karátson János és Simon L. Péter [4].

4. A Tétel bizonyítása

Ebben a szakaszban meghatározzuk miként függ $T'(p_\gamma)$ γ-tól, majd ennek segítségével bebizonyítjuk Tételünket.

Behelyettesítve $F(u) = \beta u - u^{1-\gamma}/(1-\gamma)$-t (5)-be, majd az integrált $[0,1]$-be transzformálva $t = (s/p)^\gamma$-val azt kapjuk:

$$T(p) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\beta}} \int_0^1 l(t)\sqrt{\frac{p}{h(t) - p^{-\gamma}/K}}dt. \tag{15}$$

ahol

$$h(t) = \frac{1 - t^{1/\gamma}}{1 - t^{1/\gamma - 1}}\ ,\ l(t) = \frac{t^{1/\gamma - 1}}{\sqrt{1 - t^{1/\gamma - 1}}} \quad \text{és } K = \beta(1-\gamma).$$

Ugyanis:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}}ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{\beta(p-s) - \frac{1}{1-\gamma}(p^{1-\gamma} - s^{1-\gamma})}}ds.$$

$t = (s/p)^\gamma$, így $ds = \frac{p}{\gamma} t^{1/\gamma - 1} dt$. Ezzel:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\frac{p}{\gamma} t^{\frac{1}{\gamma} - 1}}{\sqrt{\beta p\left(1 - t^{\frac{1}{\gamma}}\right) - \frac{p^{1-\gamma}}{1-\gamma}\left(1 - t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}}dt =$$

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{p} t^{\frac{1}{\gamma} - 1}}{\sqrt{\left(1 - t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)\left(\frac{1 - t^{\frac{1}{\gamma}}}{1 - t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} - \frac{1}{1-\gamma}\frac{1}{p^\gamma}\frac{1}{\beta}\right)}}dt =$$

$$\frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma - 1}}{\sqrt{1 - t^{1/\gamma - 1}}} \sqrt{\frac{p}{\frac{1 - t^{1/\gamma}}{1 - t^{1/\gamma - 1}} - p^{-\gamma}/(\beta(1-\gamma))}}dt.$$

T deriváltja p_γ-ban:

$$T'(p_\gamma) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{p_\gamma 2\beta}} \int_0^1 l(t)(h(t) - 1)^{-\frac{3}{2}}(h(t) - 1 - \gamma)dt =: \frac{1}{2\gamma\sqrt{p_\gamma 2\beta}} \int_0^1 I(t,\gamma)dt.$$

Ugyanis vezessük be az

$$L(p) := \frac{p}{h(t) - p^{-\gamma}/K}$$

jelölést. Ezzel:

$$T(p) = \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t)\sqrt{L(p)}dt.$$

$$T'(p) = \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t)\frac{L'(p)}{2\sqrt{L(p)}}dt.$$

Így $T'(p)$ kiszámításához $L'(p)$-re van szükségünk.

$$L'(p) = \frac{h(t) - \frac{1}{Kp^\gamma} + \frac{p}{K}(-\gamma)\frac{1}{p^{\gamma+1}}}{(h(t) - 1/(Kp^\gamma))^2} = \frac{h(t) - \frac{\gamma+1}{Kp^\gamma}}{(h(t) - 1/(Kp^\gamma))^2}.$$

$$L'(p_\gamma) = \frac{h(t) - \frac{\gamma+1}{Kp_\gamma^\gamma}}{(h(t) - 1/(Kp_\gamma^\gamma))^2} = \frac{h(t) - \gamma - 1}{(h(t) - 1)^2}.$$

$$L(p_\gamma) = \frac{p_\gamma}{h(t) - 1/(p_\gamma^\gamma K)} = \frac{p_\gamma}{h(t) - 1},$$

ugyanis

$$p_\gamma^\gamma = \left(\left(\frac{1}{\beta(1-\gamma)}\right)^{1/\gamma}\right)^\gamma = \frac{1}{\beta(1-\gamma)} = \frac{1}{K}.$$

Így:

$$T'(p) = \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t)\frac{h(t) - \gamma - 1}{(h(t) - 1)^2}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{h(t) - 1}{p_\gamma}}dt$$

$$= \frac{1}{2\gamma\sqrt{p_\gamma}\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t)\frac{h(t) - \gamma - 1}{(h(t) - 1)^{3/2}}dt.$$

4 Lemma *Ha* $\gamma < 1/2$ *akkor* $T'(p_\gamma) < 0$*, ha* $\gamma = 1/2$ *akkor* $T'(p_\gamma) = 0$*, ha* $\gamma > 1/2$*, akkor* $T'(p_\gamma) > 0$.

Bizonyítás. Közvetlen számolással azt kapjuk, hogy

$$I(t, \gamma) = l(t)(h(t) - 1)^{-\frac{3}{2}}(h(t) - 1 - \gamma) =$$

$$\frac{t^{1/\gamma - 1}}{\sqrt{1 - t^{1/\gamma - 1}}}\left(\frac{1 - t^{1/\gamma}}{1 - t^{1/\gamma - 1}} - 1\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1 - t^{1/\gamma}}{1 - t^{1/\gamma - 1}} - 1 - \gamma\right) =$$

$$\frac{t^{1/\gamma - 1}}{\sqrt{1 - t^{1/\gamma - 1}}}\left(\frac{t^{\frac{1}{\gamma} - 1} - t^{\frac{1}{\gamma}}}{1 - t^{\frac{1}{\gamma} - 1}}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{(1+\gamma)t^{\frac{1}{\gamma} - 1} - t^{\frac{1}{\gamma}} - \gamma}{1 - t^{\frac{1}{\gamma} - 1}}\right) =$$

$$\frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}}\frac{(1-t^{\frac{1}{\gamma}-1})^{3/2}}{t^{\frac{3}{2\gamma}-\frac{3}{2}}(1-t)^{3/2}}\frac{(1+\gamma)t^{\frac{1}{\gamma}-1}-t^{\frac{1}{\gamma}}-\gamma}{1-t^{\frac{1}{\gamma}-1}}=$$
$$t^{1/2-1/2\gamma}\left[(1+\gamma)t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}-\gamma\right](1-t)^{-3/2}.$$

Azt kell belátnunk, hogy $\gamma<1/2$ esetén $\int_0^1 I(t,\gamma)dt<0$ illetve $\gamma>1/2$ esetén $\int_0^1 I(t,\gamma)dt>0$. Ehhez elég azt belátni, hogy amennyiben $\gamma<1/2$ akkor $I(t,\gamma)<I(t,1/2)$ illetve amennyiben $\gamma>1/2$ akkor $I(t,\gamma)>I(t,1/2)$ minden $t\in(0,1)$, ugyanis $\int_0^1 I(t,1/2)=0$-t már [1]-ben bizonyították.

Először vizsgáljuk a $\gamma<1/2$ esetet. $I(t,\gamma)<I(t,1/2)$ minden $t\in(0,1)$ esetén azt jelenti, hogy:

$$t^{1/2-1/2\gamma}\left[(1+\gamma)t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}-\gamma\right](1-t)^{-3/2}<\frac{t-1/2}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Ezt átalakítva:

$$t^{1-1/2\gamma}\left[(1+\gamma)t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}-\gamma\right]<(t-1/2)(1-t),$$

$$t^{1-1/2\gamma}\left[t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}\right]+t^{1-1/2\gamma}\gamma\left[t^{1/\gamma-1}-1\right]<(t-1/2)(1-t),$$

$$t^{-1/2\gamma+1/\gamma}\left[1-t\right]+t^{1-1/2\gamma}\gamma\left[t^{1/\gamma-1}-1\right]<(t-1/2)(1-t),$$

$$t^{1-1/2\gamma}\gamma\left[t^{1/\gamma-1}-1\right]<-t^{1/2\gamma}(1-t)+(t-1/2)(1-t),$$

$$\gamma t^{1-1/2\gamma}(1-t^{1/\gamma-1})>(1-t)(\frac{1}{2}+t^{1/2\gamma}-t).$$

Megmutatjuk, hogy:

$$\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1-t^{\frac{1}{\gamma}-1})>\frac{1}{2}(1-t)>(1-t)(\frac{1}{2}+t^{\frac{1}{2\gamma}}-t).$$

A jobboldali egyenlőtlenség nyilvánvaló, ugyanis $t>t^{\frac{1}{2\gamma}}$ minden $t\in(0,1)$ esetén, ha $\gamma<\frac{1}{2}$. A baloldali egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy:

$$r(t):=2\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1-t^{\frac{1}{\gamma}-1})-(1-t)=2\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}-1+t-2\gamma t^{\frac{1}{2\gamma}}>0 \text{ minden } t\in(0,1).$$

Elég megmutatni, hogy $r'(t)<0$ ugyanis $r(1)=0$. A derivált:

$$r'(t)=(2\gamma-1)t^{-\frac{1}{2\gamma}}+1-t^{\frac{1}{2\gamma}-1}.$$

Ahhoz, hogy belássuk $r'(t)<0$-t elég belátnunk azt, hogy $r''(t)>0$ ugyanis $r'(1)=2\gamma-1<0$. A második derivált:

$$r''(t) = (\frac{1}{2\gamma} - 1)t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} - (\frac{1}{2\gamma} - 1)t^{\frac{1}{2\gamma}-2}.$$

Itt $\frac{1}{2\gamma} - 1 > 0$ így $r''(t) > 0$ akkor és csak akkor, ha:

$$t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} > t^{\frac{1}{2\gamma}-2},$$

ami $t \in (0,1)$ esetén pontosan akkor igaz, ha:

$$-\frac{1}{2\gamma} - 1 < \frac{1}{2\gamma} - 2$$

$$\gamma < 1.$$

Most vizsgáljuk a $\gamma > 1/2$ esetet. Ekkor azt kell belátnunk, hogy $I(t,\gamma) > I(t,1/2)$ minden $t \in (0,1)$ esetén. $I(t,\gamma) > I(t,1/2)$-t hasonlóan átalakítva, mint az előző esetben azt kell bizonyítanunk, hogy minden $t \in (0,1)$ esetén:

$$\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1 - t^{\frac{1}{\gamma}-1}) < (1-t)(\frac{1}{2} + t^{\frac{1}{2\gamma}} - t).$$

Megmutatjuk, hogy:

$$\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1 - t^{\frac{1}{\gamma}-1}) < \frac{1}{2}(1-t) < (1-t)(\frac{1}{2} + t^{\frac{1}{2\gamma}} - t).$$

A jobboldali egyenlőtlenség nyilvánvaló, ugyanis $t < t^{\frac{1}{2\gamma}}$ minden $t \in (0,1)$ esetén, ha $\gamma > \frac{1}{2}$. A baloldali egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy:

$$r(t) := 2\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}} - 1 + t - 2\gamma t^{\frac{1}{2\gamma}} < 0 \quad \text{minden } t \in (0,1).$$

Elég megmutatni, hogy $r'(t) > 0$ ugyanis $r(1) = 0$. A derivált:

$$r'(t) = (2\gamma - 1)t^{-\frac{1}{2\gamma}} + 1 - t^{\frac{1}{2\gamma}-1}.$$

Ahhoz, hogy belássuk $r'(t) > 0$-t elég belátnunk azt, hogy $r''(t) < 0$ ugyanis $r'(1) = 2\gamma - 1 > 0$. A második derivált:

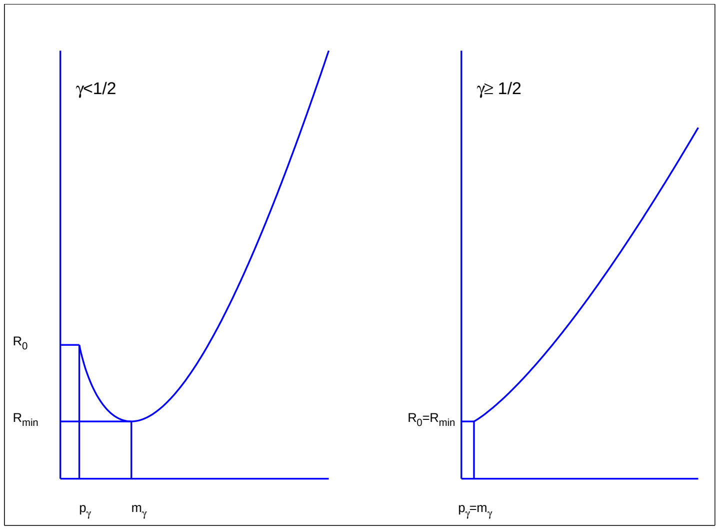
$$r''(t) = (\frac{1}{2\gamma} - 1)t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} - (\frac{1}{2\gamma} - 1)t^{\frac{1}{2\gamma}-2}.$$

Itt $\frac{1}{2\gamma} - 1 > 0$ így $r''(t) > 0$ akkor és csak akkor, ha:

$$t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} > t^{\frac{1}{2\gamma}-2},$$

ami a fentiek alapján igaz minden $t \in (0,1)$, és $\gamma < 1$ esetén.

$\square$



1. ábra. A visszatérési leképezés tipikus alakja $\gamma < 1/2$ és $\gamma \geq 1/2$ esetén.

Felhasználva az 1 Megjegyzést, a 2 Lemmát és a 4 Lemmát már könnyen be tudjuk bizonyítani Tételünket.

Bizonyítás. [Tétel 1. bizonyítása]
A bizonyítás fő ötlete az, hogy az 1 peremértékprobléma pozitív megoldásainak száma egyenlő $T(p) = R$ megoldásszámával. Felhasználva (5)-öt láthatjuk, hogy $R_0 = T(p_\gamma)$ (ld. 1. ábra). Az 1 Lemma alapján tudjuk, hogy T értelmezési tartománya a $[p_\gamma, +\infty)$ félegyenes.

Ha $\gamma \geq 1/2$ akkor (4) alapján tudjuk, hogy T kezdetben növekszik és az 1 Megjegyzés miatt nem lehet maximuma. Azaz T végig nő, és az értékkészlete $[R_0, +\infty)$ felhasználva a 2 Lemmát, mely szerint $T(p) \to \infty$ ha $p \to \infty$. Így $T(p) = R$ megoldásainak száma egy, ha $R \geq R_0$, és nulla, ha $R < R_0$.

Ha $\gamma < 1/2$ akkor (4) alapján T kezdetben csökken, és a 2 Lemma alapján végtelenben végtelenhez tart. Így az 1 Megjegyzés alapján T-nek van minimuma, jelölje ezt R_{min}. Azaz T csökken R_0-tól R_{min}-ig, majd nő végtelenig. Így $T(p) = R$ megoldásainak száma nulla, ha $R < R_{min}$, egy ha $R = R_{min}$, és kettő ha $R_{min} < R \leq R_0$ és ismét egy ha $R > R_0$.

A Tételben szereplő R_0 nem más mint a $T(p_\gamma)$ átalakítva, ugyanis behelyettesítve (15)-be:

$$T(p_\gamma) = \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{p_\gamma}{\frac{1-t^{1/\gamma}}{1-t^{1/\gamma-1}} - p_\gamma^{-\gamma}/(\beta(1-\gamma))}} dt =$$

$$\frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1-t^{1/\gamma}}{1-t^{1/\gamma-1}} - 1}} dt =$$

$$\frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1-t^{1/\gamma}-(1-t^{1/\gamma-1})}{1-t^{1/\gamma-1}}}} dt =$$

$$\frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{1-t^{1/\gamma-1}}{t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}}} dt =$$

$$\frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}}} dt = \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^{1-1/\gamma}-t^{2-1/\gamma}}} dt.$$

$z = t^{1/\gamma}$, $\gamma z^{\gamma-1} dz = dt$ helyettesítéssel élve:

$$T(p_\gamma) = \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\gamma z^{\gamma-1}}{\sqrt{z^{\gamma-1}-z^{2\gamma-1}}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\beta^{1+\gamma}}(1-\gamma)^{1/2\gamma}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z^{1-\gamma}-z}} dz.$$

□

A. Intergálformula

Tekintsük az (1) peremértékproblámát, és annak (4) megközelítését.

A visszatérési leképezést eredetileg úgy értelmeztük, hogy

$$T(p) = sup\{r > 0 : u(s,p) > 0, \forall s \in [0,r)\},$$

azaz $T(p)$ nem más, mint $u(\cdot,p)$ első gyöke. Most belátjuk hogy bevezetve az $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ jelölést, $T(p)$-t definiálhatjuk egy integrállal is:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}}\, ds.$$

Használjuk a következő Hamilton függvényt:

$$H(r) := \frac{u'(r)^2}{2} + F(u(r)).$$

Tudjuk, hogy H konstans, így $H(0) = F(u(0)) = F(p)$. Így:

$$u'(r)^2 = 2(F(p) - F(u(r))).$$

Azt tudjuk, hogy $u'(r) < 0$, ezzel

$$\begin{aligned} u'(r) &= -\sqrt{2(F(p) - F(u(r)))} \\ -1 &= \frac{u'(r)}{\sqrt{2(F(p) - F(u(r)))}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Integrálva 0-tól $T(p)$-ig:

$$-T(p) = \int_0^{T(p)} \frac{u'(r)}{\sqrt{2(F(p) - F(u(r)))}} dx.$$

$s = u(r)$ helyettesítéssel élve:

$$-T(p) = \int_p^0 \frac{1}{\sqrt{2(F(p) - F(s))}} ds,$$

azaz:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}} ds.$$

Bizonyos esetekben az $s = tp$ helyettesítést még ajánlott alkalmazni, ezzel:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{p}{\sqrt{F(p) - F(pt)}} dt.$$

B. Radiálisan szimmetrikus megoldás

5 Lemma (2) *minden megoldása radiálisan szimmetrikus, azaz* $u(l) = u(-l)$ *minden* $l < R$ *esetén.*

Bizonyítás. Mivel $u(-R) = u(R) = 0$ így létezik x_0, hogy $u(x_0) \geq u(x)$ minden $x \in (-R, R)$ esetén és $u'(x_0) = 0$. Vezessük be a $v(x) := u(2x_0 - x)$-et. Írjuk fel az u-ra és v-re vonatkozó kezdeti érték problémákat:

$$\begin{gathered} u''(x) + f(u(x)) = 0 \\ u'(x_0) = 0, \;\; u(x_0) = u(x_0). \end{gathered} \tag{17}$$

Mivel v nem más mint u eltoltja, így v-re a következő egyenlet áll fenn:

$$\begin{gathered} v''(x) + f(v(x)) = 0 \\ v'(x_0) = 0, \;\; v(x_0) = u(x_0). \end{gathered} \tag{18}$$

Azaz a két egyenlet ugyanaz, így $v(x) = u(x)$, amivel azt kapjuk, hogy u x_0-ra szimmetrikus, és így az is igaz, hogy pozitív és negatív irányba egyszerre ér le, azaz $x_0 = 0$, vagyis tényleg radiálisan szimmetrikus.

$\square$

C. Szeparációs tételek

Tekintsük a következő másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletet:

$$u'' + a_1 u' + a_2 u = 0 \tag{19}$$

φ_1 és φ_1 a (19) két ún. **lineárisan összefüggő megoldása** ha létezik olyan c valós szám, hogy $\varphi_1 = c\varphi_2$.

6 Lemma *A* (19) *egyenlet megoldásainak gyökhelyei nem torlódhatnak.*

Bizonyítás. Legyen φ a (19) egyenlet megoldása, és tegyük fel, hogy gyökhelyeinek torlódási pontja t^*. Ebben a pontban (φ folytonossága, miatt) $\varphi(t) = 0$ és (a Rolle tétel, és φ folytonossága miatt) $\varphi'(t^*) = 0$ lenne, de mivel (19) megoldása egyértelmű, ezért azt kapnánk, hogy $\varphi = 0(\cdot)$, ami viszont ellentmond annak, hogy azt kizárjuk a megoldások közül.

□

2. Tétel ***Sturm szeparációs tétele*** *Ha φ_1 és φ_2 az* (19) *egyenlet két lineárisan független megoldása, akkor ezek gyökhelyei elválasztják egymást.*

Bizonyítás. Legyen φ_1 és φ_2 a (19) egyenlet két lineárisan független megoldása, és jelölje φ_1 két szomszédos gyökét t_1 és t_2. Ekkor $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = 0$, $\varphi_1(t) \neq 0$ ha $t \in (t_1, t_2)$; továbbá nyilvánvalóan $\varphi_1'(t_1) \neq 0$, $\varphi_1'(t_1) \neq 0$, ellenkező esetben ugyanis $\varphi_1 = 0(\cdot)$ lenne. Ha W jelöli a φ_1 és φ_2 megoldás Wrońskideterninánsát, akkor feltehető például, hogy az pozitív definit (a negatív definitást feltételezve hasonlóan érvelhetnénk): W$= \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' > 0$. Mivel $-\varphi_1'(t_1)\varphi_1'(t_2) > 0$, $-\varphi_1'(t_1)\varphi_2(t_1) > 0$, $-\varphi_1'(t_2)\varphi_2(t_2) > 0$. (Az első egyenlőtlenség tagadása maga után vonná, hogy a gyökök nem szomszédosak, a második és a harmadik egyenlőtlenség pedig a Wroński-determináns előjelére tett feltevésből behelyettesítéssel adódik.) Ezért (például a második és harmadik egyenlőtlenséget összeszorozva, és elosztva az elsővel kapjuk, hogy) $\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2) < 0$, tehát φ_2-nek van legalább egy gyöke a (t_1, t_2) intervallumban. Több biztos nincs, ekkor ugyanis a két szomszédos gyökhely között az eddigiek szerint lenne φ_1-nek gyökhelye, ellentétben azzal a feltevéssel, hogy t_1 és t_2 két szomszédos gyöke volt φ_1-nek.

□

7 Lemma *Legyenek $a_2, b_2 \in C([a, b]$ olyan függvények, melyekre $a_2 \leq b_2$, de $a_2 \neq b_2$. Legyenek*

$$L_1 u := (au')' + a_2 u \quad \text{és} \quad L_2 u := (au')' + b_2 u.$$

Legyen $L_1\phi = 0$, t_1 és t_2 pedig a ϕ két egymást követő gyöke. Ekkor $L_2\psi = 0$ esetén ψ függvénynek van gyöke a $(t_1.t_2)$ intervallumban.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\psi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\psi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban (a $\psi < 0$ esetben hasonlóan érvelhetünk). Legyen $A := a(\phi'\psi - \phi\psi')$, ekkor $A' = (p\phi')'\psi + (p\phi')\psi' - (p\psi')'\phi - (p\psi')\phi' = (p\phi')'\psi + a_2\psi\phi + a_2\psi\phi - (p\psi')'\phi - b_2\phi\psi + b_2\phi\psi = (b_2 - a_2)\phi\psi$. Így:

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} (b_2 - a_2)\phi\psi = A(t_2) - A(t_1) = a(t_2)\phi'(t_2)\psi(t_2) - a(t_1)\phi'(t_1)\psi(t_1) \leq 0$$

ami ellentmondás. (Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $\phi'(t_1) > 0$ és $\phi'(t_2) < 0$.)

$\square$

Hivatkozások

[1] Y.S. Choi, A.C. Lazer, P.J. McKenna: Some remarks on a singular elliptic boundary value problem, *Nonlinear Anal.*, **32** (1998) 305-314.

[2] J.I. Diaz, J.M. Morel, L. Oswald, An elliptic equation with singular nonlinearity, *Comm. P.D.E.*, **12** (1987) 1333-1344.

[3] J. Hernández, J. Karátson, P. L. Simon: Multiplicity for semilinear elliptic equations involving singular nonlinearity, *Nonlinear Analysis*, **65** (2006) 265-283.

[4] J. Karátson, P. L. Simon: Bifurcations of semilinear elliptic equations with convex nonlinearity, *Electron. J. Differential Equations*, **1999** (43)(1999) 1-16.