

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Horváth Tamás

Alkalmazott matematikus szak

NEMLINEÁRIS PEREMÉRTÉK
PROBLÉMÁK PONTOS MEGOLDÁSSZÁMA

DIPLOMAMUNKA

Témavezető:

Simon Péter, egyetemi docens

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék



Budapest, 2008

Tartalomjegyzék

1. Szemilineáris elliptikus egyenletek	1
1.1. Bevezetés	1
1.2. Nemlineáris peremérték problémák	2
1.3. A visszatérési leképezés technika	4
1.4. Kapcsolat az időfüggő egyenletekkel	5
2. Szinguláris nemlineáris egyenletek	9
2.1. Bevezetés	9
2.2. Eredmények	10
2.3. Számítógépes megközelítés	11
2.3.1. A kezdetiérték probléma numerikus kezelése	12
2.3.2. Az intergálformula numerikus kezelése	12
2.3.3. Eredmények	13
3. Egy speciális szinguláris probléma	18
3.1. Bevezetés	18
3.2. A visszatérési leképezés	19
3.3. A visszatérési leképezés jellemzése	21
3.4. A Tétel bizonyítása	23
A. Matematikai háttér	30
A.1. Intergálformula	30
A.2. Radiálisan szimmetrikus megoldás	32
A.3. Szeparációs tételek	33
Irodalomjegyzék	36

Ábrák jegyzéke

1.1.	A visszatérési leképezés $f(x) = x^3 + 1$ esetén, az 1.2.1. Tétel (i)-nek megfelelően.	3
2.1.	u alakja a kezdeti értéktől függően, balra fent $u(0) < p^*$, jobbra fent $u(0) = p^*$, balra lent $p^* < u(0) < \inf D(T)$, balra lent $\inf D(T) < u(0)$. ($\gamma = .3$ és $\beta = 1$ mellett)	13
2.2.	Jobb oldalt az ode45-tel, bal oldalon az integrálformulával kapott visszatérési leképezés $\gamma = 0.4$ $\beta = 1$ esetén.	14
2.3.	A visszatérési leképezés $\gamma = 0.3$ esetén	15
2.4.	A visszatérési leképezés $\gamma = 0.5$ esetén	16
2.5.	A visszatérési leképezés $\gamma = 0.7$ esetén	17
3.1.	A visszatérési leképezés tipikus alakja $\gamma < 1/2$ és $\gamma \geq 1/2$ esetén.	28

Előszó

Jelen diplomamunka célja az, hogy megimertesse az Olvasót a nemlineáris szinguláris peremérték problémák megoldásszámának meghatározásához használt egyik legelterjedtebb módszerrel. Ezen túlmenően némi kitekintést is ad arra, hogy a fentiek hogy kapcsolódnak az időfüggő egyenletekhez.

A téma gyökerei mélyre nyúlnak vissza, de jelentőségüket mutatja, hogy még napjainkban sem telik el úgy egy konferencia, hogy pár előadás ne szólna erről a témáról. A módszer az ún. visszatérési leképezés technikán alapul, melyet Gidas, Ni és Nirenberg vezetett be először, és máig a leghatékonyabb módszer a pontos megoldásszám meghatározására.

Az első fejezetben ismertetjük a főbb matematikai hátteret, előtérben a másodrendű elliptikus parciális differenciálegyenletekbe történő rövid betekintéssel. A fejezet egyúttal átvezet bennünket a címben szereplő szinguláris nemlineáris problémákhoz, végül a záró fejezetben egy sokat vizsgált eset pontos megoldásszámát adjuk meg. A Függelékben a legfontosabb felhasznált matematikai tételek bizonyításáról ejtünk pár szót.

1. fejezet

Szemilineáris elliptikus egyenletek

1.1. Bevezetés

Diplomamunkám célja az alábbi típusú egyenletek megoldásszámának vizsgálata:

$$\Delta u(x) + f(u(x)) = 0 \tag{1.1}$$

ahol $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, $\Delta u(x) = \partial_1^2 u(x) + \partial_2^2 u(x) + \dots + \partial_n^2 u(x)$ a szokásos n -dimenziós Laplace-operátor, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. A kitűzött feladathoz tartoznak természetesen peremfeltételek, melyek ebben a dolgozatban homogén Dirichlet peremfeltételek lesznek, azaz:

$$u|_{\Omega} = 0,$$

valamely $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos tartomány esetén.

Ezeket az egyenleteket [Simon-Baderko] szemilineáris elliptikus egyenleteknek nevezzük. A megoldásnak elég sok tulajdonsága ismert, ha f lineáris függvény, azaz $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Nehézséget az okozhat, ha f nemlineáris, esetleg szingularitása van.

A továbbiakban a feladatot annyival egyszerűsítjük, hogy Ω -t gömbnek választjuk. Ekkor a probléma a következő alakú:

$$\Delta u + f(u) = 0 \tag{1.2}$$

$$u|_{B_R} = 0$$

ahol B_R az origó középpontú R sugarú gömb.

1.2. Nemlieáris peremérték problémák

A irodalom meglehetősen sok cikket tud felmutatni ezekkel kapcsolatban.

Speciális konvex f -ek esetén sok cikk foglalkozott a témával, de nem sikerült teljesen megoldaniuk. Joseph és Lundgren [21] meghatározták a pontos megoldásszámot $f(u) = e^u$ és $f(u) = (1 + \alpha u)^\beta$ esetén, ha $\alpha, \beta > 0$. A Pohozaev formula [30] alapján meg lehet mutatni, hogy $f(u) = u^p$ esetén pontosan akkor létezik pozitív megoldás, ha $p < (n + 2)/(n - 2)$, és Sturm tétele alapján az egyértelmű is, ha gömbön van kitűzve a feladat.

Sok további cikk foglalkozik az $f(u) = u^p + \lambda u^q$, esettel, különösen amikor p közel van a kritikus $(n + 2)/(n - 2)$ értékhez [1, 2, 3, 4, 26]. McLeod eredményei [25] a pozitív megoldás egyértelműségéről a konvex függvények egész nagy családjára kiterjednek, főként az $f(u) = u^p - u$ (ha $1 < p < (n + 2)/(n - 2)$), esetre (l. még [23]).

[32] és [33] vizsgálták a köbös f függvények esetét, $n = 1$ esetén a konvex pozitív f függvényekre Laetch adott leírást [27, 28] még harmadik típusú peremfeltétel mellett is.

Egy dimenzióban az összes konvex függvényre teljes leírást ad Karátson és Simon [22] cikke, ennek két fő tétele:

1.2.1. Tétel. *Legyen $n = 1$, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ szigorúan konvex, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$.*

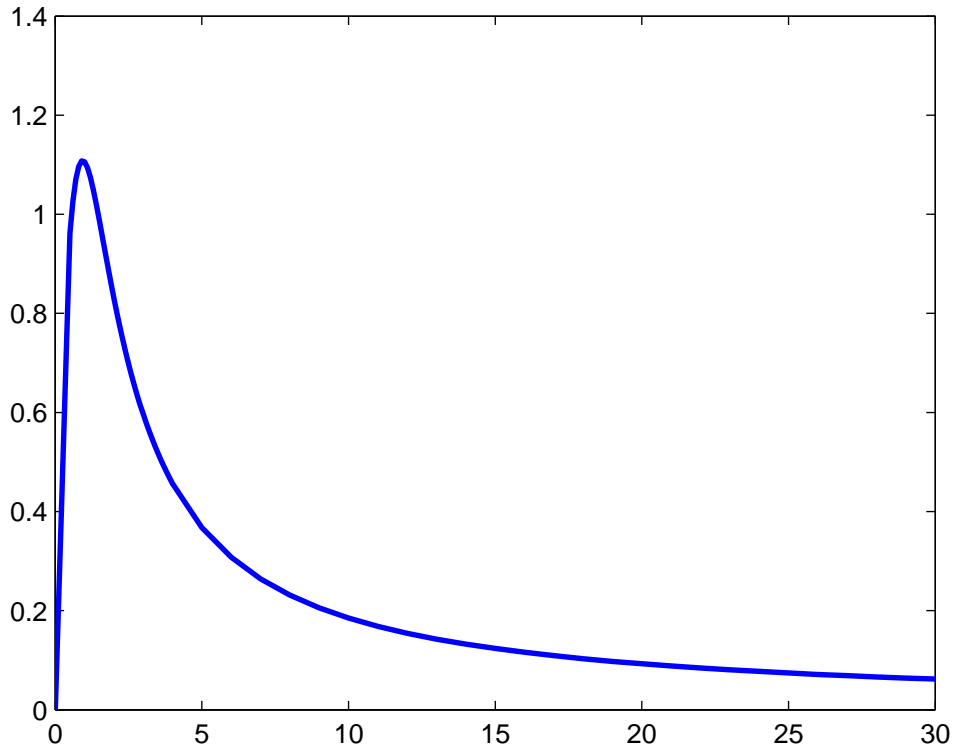
(i) *Ha $f(u) > 0$ ($u \in [0, \infty)$) akkor létezik $R_{sup} > 0$ úgy hogy (1.2)-nek kettő megoldása van $R < R_{sup}$ esetén, egy megoldása van $R = R_{sup}$ esetén, és nincs megoldása $R > R_{sup}$ esetén.*

(ii) *Ha $f(0) > 0$ és f -nek van gyöke $(0, \infty)$ -ben akkor (1.2)-nek kettő megoldása van minden $R > 0$ -ra.*

(iii) *Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) > 0$ akkor létezik egy $R_{sup} > 0$ úgy hogy (1.2)-nek egy megoldása van $R < R_{sup}$ esetén és nincs megoldása $R \geq R_{sup}$ esetén.*

(iv) *Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) \leq 0$ akkor (1.2) megoldása egyértelmű minden $R > 0$ esetén.*

(v) *Ha $f(0) < 0$ akkor létezik $R_{sup} > 0$ úgy hogy (1.2) megoldása egyértelmű $R \leq R_{sup}$ esetén, és nincs megoldása $R > R_{sup}$ esetén.*



1.1. ábra. A visszatérési leképezés $f(x) = x^3 + 1$ esetén, az 1.2.1. Tétel (i)-nek megfelelően.

1.2.2. Tétel. Legyen $n = 1$, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ szigorúan konvex, $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = L \in (0, +\infty)$ és $R_\infty := \frac{\pi}{2\sqrt{L}}$.

- (i) Ha $f(u) > 0$ ($u \in [0, \infty)$) akkor létezik $R_{sup} > R_\infty$ úgy, hogy (1.2) megoldása egyértelmű $R \leq R_\infty$ és $R = R_{sup}$ esetén, kettő megoldása van, ha $R_\infty < R < R_{sup}$ és nincs megoldása, ha $R > R_{sup}$.
- (ii) Ha $f(0) > 0$ és f -nek gyöke van $(0, \infty)$ -ben, akkor (1.2) egyértelműen megoldható $R \leq R_\infty$ esetén, és két megoldása van $R > R_\infty$ esetén.
- (iii) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) > 0$ akkor létezik $R_{sup} > R_\infty$ úgy, hogy (1.2)-nek nincs megoldása $R \leq R_\infty$ esetén, egy megoldása van $R_\infty < R < R_{sup}$ esetén. és nincs megoldása, ha $R \geq R_{sup}$.
- (iv) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) \leq 0$ akkor (1.2)-nek nincs megoldása $R \leq R_\infty$ esetén, és egy megoldása van, ha $R > R_\infty$.

(v) Ha $f(0) < 0$ akkor létezik $R_{sup} > R_\infty$ úgy hogy (1.2)-nek nincs megoldása, ha $R \leq R_\infty$, egy megoldása van ha $R_\infty < R \leq R_{sup}$ és nincs megoldása ha $R > R_{sup}$.

1.3. A visszatérési leképezés technika

A megoldások számának meghatározásához nagyon fontos jelentőségű Gidas, Ni és Nirenberg cikke [12]. Ez alapján tudjuk, hogy a (1.2) minden pozitív megoldása radiálisan szimmetrikus, és kielégíti az alábbi másodrendű közönséges differenciálegyenletet:

$$\begin{aligned} ru''(r) + (n-1)u'(r) + rf(u(r)) &= 0 \\ u'(0) = 0, \quad u(R) &= 0; \end{aligned} \tag{1.3}$$

ahol $r = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Továbbá fennáll az is, hogy:

$$u'(r) < 0 \quad (0 < r < R). \tag{1.4}$$

Az eredmények bizonyítása az ún.: célbalövéses módszeren (az angol nyelvű szakirodalomban shooting method) alapul. Ehhez a fenti egyenletet át kell írni egy kezdeti érték feladattá:

$$\begin{aligned} ru''(r, p) + (n-1)u'(r, p) + rf(u(r, p)) &= 0 \\ u(0, p) = p, \quad u'(0, p) &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Definiáljuk a T visszatérési leképezést (az angol nyelvű szakirodalomban time-map) a következő módon: egy adott $p > 0$ -ra tekintsük (1.2) azon u megoldását, mely eleget tesz az kezdeti feltételeknek, és T a p -hez rendelje hozzá u első gyökét. Ezzel az kapjuk, hogy $u(T(p)) = 0$. Az u függvény pontosan akkor lesz az (1.2) peremérték probléma pozitív megoldása, ha $T(p) = R$. Vagyis a peremérték probléma pozitív megoldásainak száma megegyezik a $T(p) = R$ egyenlet megoldásainak számával. Ahhoz, hogy ez utóbbit meghatározzuk a visszatérési leképezés következő tulajdonságait kell megállapítanunk: értelmezési tartomány, határérték az értelmezési tartomány határain és a monotonitás.

A legpontosabb eredmények egy dimenzióban állnak rendelkezésünkre, ugyanis ekkor (1.5) Hamilton rendszer. A fenti cikkek többsége is csak egy dimenzióban adja meg a pontos megoldásszámot.

1.4. Kapcsolat az időfüggő egyenletekkel

A matematikai modellezés különböző területén merülnek fel az alábbi típusú egyenletek:

$$\partial_t u(x) = \Delta u(x) + f(u(x)). \quad (1.6)$$

Az $u(x)$ függvényt helyesebb lenne $u(t, x)$ -el jelölni, mert az időtől is függ, de a jelölések egyszerűsítése céljából eltekintünk tőle. Ezen egyenletek könnyen kapcsolatba hozhatók a fenti egyenletekkel, hiszen ha tekintjük a stacionárius állapotukat, azaz azon állapotokat, melyek nem függenek az időtől, akkor épp a fenti elliptikus egyenletek n -dimenziós megfelelőjét kapjuk vissza.

Vezessük be a következő jelölést: $\|U - V\| := \sup_{x \in [-R, R]} |U(x) - V(x)|$, ami a $[-R, R]$ -en a jól ismert maximum normát adja.

1.4.1. Definíció. Az U stacionárius megoldást **stabilisnak** nevezzük, ha $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\|U - u(0, \cdot)\| < \delta$ esetén $\|U - u(t, \cdot)\| < \varepsilon \forall t > 0$ esetén.

Tekintsük az egy dimenziós térváltozójú parabolikus egyenletet:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x) &= u''(x) + f(u(x)) \\ u(t, -R) &= u(t, R) = 0, \forall t > 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

ahol $x \in (-R, R)$. Ennek stacionárius állapota:

$$\begin{aligned} 0 &= u''(x) + f(u(x)) \\ u(-R) &= u(R) = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ennek vizsgálatához tekintsük a már megszokott kezdeti érték feladatot:

$$\begin{aligned} 0 &= u''(x, c) + f(u(x, c)) \\ u(0) &= c, u'(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

A parabolikus egyenlet linearizáltja a stacionárius állapot körül:

$$\begin{aligned}\partial_t v(x) &= v''(x) + f'(u(x))v(x) \\ v(t, -R) &= v(t, R) = 0, \forall t > 0.\end{aligned}\tag{1.10}$$

Az ehhez tartozó sajátérték feladat:

$$\begin{aligned}\lambda v(x) &= v''(x) + f'(u(x))v(x) \\ v(-R) &= v(R) = 0.\end{aligned}\tag{1.11}$$

feltehető, hogy $v(0) = 1$ és $v'(0) = 0$.

A kezdeti érték feladat segítségével elkészíthetjük a visszatérési leképezést.

Az $u(T(c), c) = 0$ egyenletből egy deriválással azt kapjuk, hogy:

$$u'(T(c), c)T'(c) + \partial_c u(T(c), c) = 0$$

Legyen $h(r, c) := \partial_c u(r, c)$. A fentiek egyenlet alapján $T'(c)$ és $h(T(c), c)$ előjele között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\text{sign}(T'(c)) = \text{sign}(h(T(c), c)),\tag{1.12}$$

ugyanis $u'(T(c), c) \leq 0$. A h -ra fennálló egyenlet:

$$\begin{aligned}h''(x) + f'(u(x))h(x) &= 0 \\ h(0) &= 1, h'(0) = 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

A $w(x) = u'(x)$ függvényre az alábbi egyenlet áll fenn:

$$\begin{aligned}w''(x) + f'(u(x))w(x) &= 0 \\ w(0) &= 0, w'(0) = -f(c).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Így azt kapjuk, hogy $w(x) < 0 \forall x \in (0, R)$, ugyanis $w(x) = u'(x)$ ami [12] alapján negatív.

(1.11)-et h -val, (1.13)-at v -vel szorozva, és egymásból kivonva őket, és $(0, r)$ -en integrálva kapjuk, hogy:

$$\int_0^r (v''h - vh'') = \lambda \int_0^r hv$$

a baloldalon parciálisan integrálva

$$\int_0^r (v''h - vh'') = [v'h]_0^r - \int_0^r v'h' - [vh']_0^r + \int_0^r v'h' = v'(r)h(r) - v(r)h'(r),$$

azaz:

$$v'(r)h(r) - v(r)h'(r) = \lambda \int_0^r hv. \quad (1.15)$$

Ezek segítségével beláthatjuk az alábbi tételt:

1.4.1. Tétel. *Legyen λ_1 a (1.11) első sajátértéke. Ekkor:*

1. $T'(c) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$
2. $T'(c) > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0$
3. $T'(c) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0$

Bizonyítás.

1. Tegyük fel hogy $\lambda_1 = 0$, ekkor $h = v$, ui.: a kezdeti feltétel ugyanaz mint a v -re vonatkozó esetben, így $h(T(c), c) = v(T(c), c)$, és így (1.12) alapján $T'(c) = 0$.

Ha $T'(c) = 0$ akkor $h(T(c), c) = 0$. Ekkor (1.15)-öt alkalmazhatjuk $r = R = T(c)$ -re. $\int_0^R hv = \int_0^R h^2 > 0$, de (1.15) baloldala 0, ami csak úgy lehet, hogy $\lambda_1 = 0$.

2. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 < 0$, ekkor 1 és 3 \Rightarrow iránya miatt nem lehet $T'(c) \leq 0$, így $T'(c) > 0$.

Ha $T'(c) > 0$ akkor (1.12) miatt $h(T(c), c) > 0$. (1.13) és (1.14) összehasonlítása alapján azt kapjuk, hogy $h(x) > 0 \forall x \in (0, T(c))$. Ui.: ha h -nak lenne $(0, T(c))$ -ben gyöke, akkor ezen gyök és $T(c)$ között w is nulla lenne, ami nem lehet. Így (1.15)-t alkalmazva $r = R = T(c)$ -re:

$$v'(r)h(R) = \lambda_1 \int_0^R hv,$$

így mivel $v'(R) < 0$ és $h(R) > 0$ és $\int_0^R hv > 0$ így $\lambda_1 < 0$.

3. Tegyük fel, hogy $\lambda_1 > 0$ ekkor 1 és $2 \Rightarrow$ iránya miatt nem lehet $T'(c) \geq 0$, így $T'(c) < 0$.

Ha $T'(c) < 0$ akkor h -nak van gyöke. Ui.: (1.12) alapján $h(R) < 0$. Legyen a gyök r^* . Alkalmazzuk (1.15)-t $r = r^*$ -ra. Ezzel:

$$-v(r^*)h'(r^*) = \lambda_1 \int_0^{r^*} hv.$$

Most $v(r^*) > 0$ és $h'(r^*) < 0$, valamint $\int_0^{r^*} hv > 0$ és így $\lambda_1 > 0$.

□

A következőkben vizsgáljuk azokat az eseteket, melyekben f -nek szingularitása van.

2. fejezet

Szinguláris nemlineáris egyenletek

2.1. Bevezetés

A továbbiakban is tekintsük a már megszokott egyenletet:

$$\begin{aligned}\Delta u + f(u) &= 0 \\ u|_{B_R} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

de most f -ről feltesszük, hogy szingularitása van a 0-ban. Ilyen és ehhez hasonló problémák merülhetnek fel nem-Newtoni folyadékok, kémiai katalizátorok, vagy nemlineáris hővezetési egyenletek vizsgálatakor.

Ezen esetek vizsgálatakor Gidas, Ni és Nirenberg eredménye [12] nem használható, mert abban a cikkben az egyik alapfeltevés az volt, hogy f -nek nincs szingularitása. Így más eszközökhöz kell nyúlni. Például egy dimenzióban így is be lehet látni elég egyszerűen, hogy minden megoldás radiálisan szimmetrikus l.: Függelék.

Magasabb dimenzióban pedig egyelőre a cikkek többsége csak a szimmetrikus megoldások számára mond alsó korlátot, ami persze a megoldásszámnak is egy alsó korlátja. Ekkor a radiális megoldásokat úgy keresik, mint az alábbi egyenlet megoldását:

$$\begin{aligned}(r^{n-1}u')'(r) + r^{n-1}f(u(r)) &= 0 \\ u'(0) = 0, \quad u(R) &= 0;\end{aligned}$$

ui. ez ekvivalens (2.1)-el. Ekkor már be lehet vetni a célbalövéses módszert, azaz az

$$\begin{aligned} (r^{n-1}u')'(r, p)r^{n-1}f(u(r, p)) &= 0 \\ u(0, p) = p, \quad u'(0, p) &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

kezdeti érték problémát lehet vizsgálni.

2.2. Eredmények

A szinguláris nemlinearitás egyik motiváló példája a következő:

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{\lambda}{u^\alpha} + u^p &= 0, \quad u > 0 \text{ } B_1\text{-en} \\ u|_{\partial B_1} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

ahol:

$$\lambda > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{és} \quad 1 < p < p^*,$$

ahol $p^* = \frac{n+2}{n-2}$ ha $n > 2$ és $p^* = \infty$ ha $n \leq 2$, ahol n a dimenzió.

A szinguláris nemlinearitást tartalmazó problémákkal rengetegen foglalkoztak korábban, sokkal általánosabb nemlineáris függvény-együtthatókkal, melyek x -től is függenek, például [14, 20] és a bennük fellelhető hivatkozások. A továbbiakban csak x -től független esetekkel foglalkozunk.

u^p -t nem tartalmazó esetekkel kapcsolatban létezési és egyértelműségi bizonyításokat találhatunk: [7, 9, 13, 16, 17, 24]-ban.

$\Delta u + \frac{\lambda}{u^\alpha} - u^p$ alakú egyenletek kapcsán létezési és egyértelműségi bizonyításokért $p > 0$ (továbbá $p = -\beta < 0$, $\beta < \alpha$) esetén l. [17]. ($p = -\beta < 0$, $\alpha < \beta < 1$ esetén nemlétezési eredmények várhatóak [17].)

u^p pozitív előjellel való jelenléte esetén a probléma viselkedését λ előjele befolyásolja $\lambda < 0$ esetén nem mindig vannak pozitív eredmények: létezési és nemlétezési eseteket tárgyal [10, 31, 34] és az x -től függő esetben [8, 17].

Hasonló eredmények találhatók [29]-ban a nemlineáris $\lambda(u^p - u^{-\alpha})$ probléma kapcsán. Amikor λ szorozza u^p -t, akkor létezés és egyértelműség garantált minden λ -ra ha $u^{-\alpha}$ együtthatója negatív [17]. Bizonyos esetekben a nem létezés garantált (pl.: ha $\lambda \leq \bar{\lambda}$ valamely $\bar{\lambda} > 0$ -ra) amikor $u^{-\alpha}$ együtthatója előjelet vált, vagy ha u^p -t egy korlátos nem-negatív $f(x)$ függvénnyel szorozzuk ([10, 17]). Ugyanakkor egyértelmű pozitív megoldás

létezik, ha $\lambda \leq \bar{\lambda}$ valamilyen $\bar{\lambda} > 0$ -val kettő kapcsolódó esetben, amikor az egyenlet három tagot tartalmaz: $\Delta u + \lambda u + f(x)$ egyenlő $u^{-\alpha}$ vagy $-u^{-\alpha}$ valamelyikével. $p = 0$ esetén vannak ismert eredmények, [5] de ezt a következő fejezetben mélyebben megvizsgáljuk.

$\lambda > 0$ esetén az egyértelműséget könnyebb bizonyítani egy gömbön. $p \in (0, 1)$ esetén mindig van pozitív megoldás, ami egyértelmű is [17, 31]. Másrésztől $p > 1$ esetén a létezés csak kis λ -ra áll fent. [6, 17].

2.3. Számítógépes megközelítés

A nonsinguláris esetben a problémát könnyű eleinte számítógépen tesztelni. Például az ode45 nevű eljárással lehet vizsgálni a kezdeti érték problémát, vagy fel lehet használni a visszatérési leképezés intergál formulás megközelítését (l.: Függelék).

A szinguláris probléma ehhez képest annyiban új, hogy ahogy a függvény közelíti a nullát, úgy kerülünk $f(u)$ 0-beli szingularitása miatt egyre nagyobb és nagyobb értékhez, aminek hatására a számolás pontatlanná válik, és ezzel rosszul becsüljük meg az u 0-ba való leérésének helyét. Az ode45 negyed-ötöd rendű Runge-Kutta módszert használ, a lépésközt pedig egy hibabecsléssel állítja be.

Az integrálformula használata esetén pedig arra kell ügyelni, hogy az integrálás felső határában nullával való osztás áll elő, amit a MATLAB ugyan képes kezelni, de a folyamatos hibaüzenetek elkerülése érdekében jobb, ha lejjebb vesszük a felső határt, például 10^{-7} -el.

Példának okáért nézzük az

$$\begin{aligned} u'' - \frac{1}{u^\gamma} + \beta &= 0 \\ u(-R) = u(R) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

feladatot, illetve az ehhez tartozó kezdeti érték problémát:

$$\begin{aligned} u''(r) - \frac{1}{(u(r))^\gamma} + \beta &= 0 \\ u'(0) = 0, \quad u(0) &= c \end{aligned} \quad (2.5)$$

illetve integrálformulát:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{\beta(p-s) - \frac{1}{1-\gamma}(p^{1-\gamma} - s^{1-\gamma})}} ds, \quad (2.6)$$

ami egyúttal a következő fejezetben vizsgálandó példához is átvezet bennünket.

2.3.1. A kezdetiérték probléma numerikus kezelése

Ahhoz, hogy a Matlab ode45 nevű megoldója kezelni tudja ezt a problémát, először át kell írunk elsőrendű rendszerré, a szokásos módon: $y_1(r) = u(r)$, $y_2(r) = u'(r)$. Ezzel a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} y_1'(r) &= y_2(r) \\ y_2'(r) &= \frac{1}{(y_1(r))^\gamma} - \beta, \end{aligned}$$

ahol a kezdetiértékek: $y_1(0) = c$, $y_2(0) = 0$. Elkerülendő a negatív szám hatványozását, a kódban $\frac{1}{(y_1(r))^\gamma}$ helyett $\frac{1}{|y_1(r)|^\gamma}$ szerepel.

Ezt követően két út áll előttünk. Ha ismerjük $D(T)$ infimumát, akkor elég annál nagyobb c értékekből indítani, és megvizsgálni, hogy hol lesz először nulla. Ha $\inf D(T)$ nem ismert, akkor elég sokáig futtatva az ode45-öt meg kell nézni, hogy miként néz ki maga az u függvény, és meg kell vizsgálni, hogy hol érte el először a nullát, ha elérte egyáltalán.

Itt jegyeznénk meg, hogy a pontos eredmények elérése érdekében szinguláris f függvények esetén ajánlott a maximális lépésközt szabályozni, azaz az ode45 MaxStep nevű opcióját 0,01-ra vagy még kisebbre állítani.

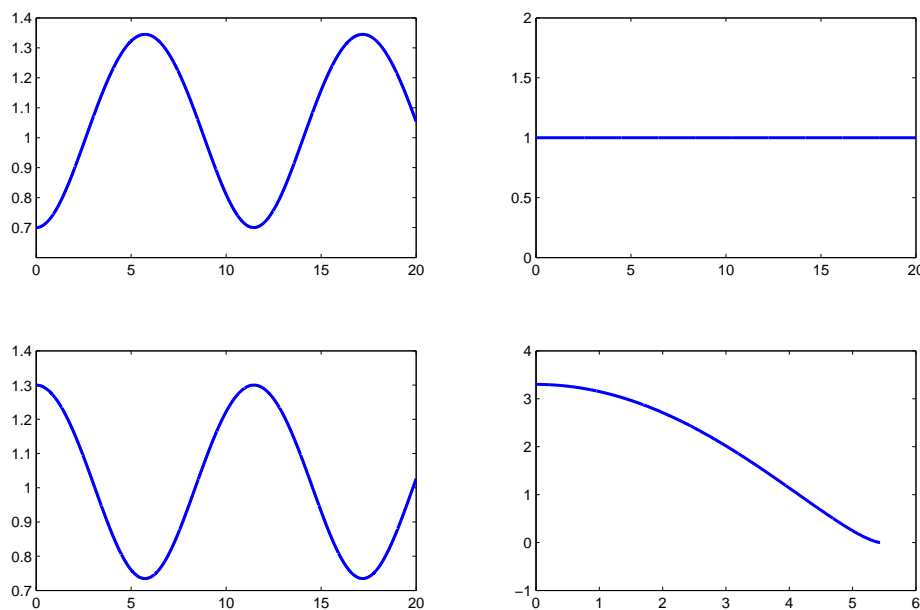
Példák $u(r)$ alakjára a (2.1) ábrán láthatóak. A rendszer egyensúlyi pontja a $(p^*, 0)$, amiből indulva u egy egyenes lesz, ami természetesen soha nem éri el az x tengelyt. Ez a p^* nem más mint $1/(\beta^{1/\gamma})$. Ha a kezdeti érték ennél alacsonyabb vagy nagyobb, de kisebb mint $\inf D(T)$ akkor hullámzó megoldásokat kapunk, amelyek nem érik el a tengelyt, és csak $\inf D(T)$ -nél magasabb értékből indulva kapunk megfelelő megoldást.

2.3.2. Az intergálformula numerikus kezelése

Valamelyest egyszerűbb megoldás lehet az integrálformulát kezelni, egyetlen hátránya, hogy nincs többdimenziós megfelelője. Egy dimenzióban viszont nagyon hasznos, és könnyebben kezelhető mint a fenti.

Ahogy már fent is ismertettük, az integrál felső határát kicsivel lejjebb kell venni, különben egy nullával való osztás áll elő, ami futási hibát okoz.

Arról nem szabad megfeledkezni, hogy akkor is ad értéket, ha $\inf D(T)$ -nél kisebb értéket vizsgálunk, csak akkor ez eredmény egy komplex szám lesz. Így csak azokat az értékeket kell figyelembe venni ahol a képzetes rész nulla.



2.1. ábra. u alakja a kezdeti értéktől függően, balra fent $u(0) < p^*$, jobbra fent $u(0) = p^*$, balra lent $p^* < u(0) < \inf D(T)$, balra lent $\inf D(T) < u(0)$. ($\gamma = .3$ és $\beta = 1$ mellett)

2.3.3. Eredmények

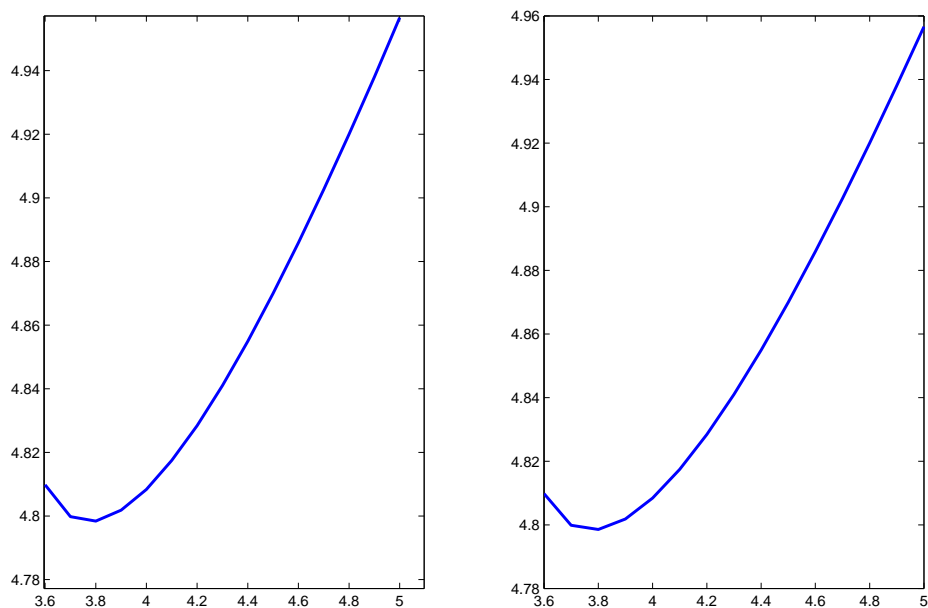
Vizsgáljuk meg a két módszerrel kapott visszatérési leképezés ábrákat egy adott γ, β párra (2.2 ábra).

A 2.2 ábrán látható két függvény különbségének maximum normája: $1.49 \cdot 10^{-4}$, azaz lényegében nem számít, hogy melyik módszer alkalmazzuk. Ha azonban megvizsgáljuk a két módszer futásidejét, akkor nagy eltéréseket fogunk kapni, amiből látszik, hogy az integrálformula használata előnyösebb. Ehhez tekintsük a 2.1 táblázatot, ahol a pontok száma annak felel meg, hogy mennyi pontból rajzoltuk ki a visszatérési leképezést, azaz mennyi értéket számoltunk ki a Matlabbal.

Nézzük meg a visszatérési leképezést bizonyos esetekben l.: 2.3, 2.4 és 2.5 ábrák.

Ez alapján az alábbi sejtésünk fogalmazódhat meg a megoldások számára, mely sejtést a következő fejezetben be is bizonyítunk.

A megoldások száma γ -tól és R -tól függ. Létezik $R_0 > R_{min}$, melyek közül R_0 képlettel megadható, R_{min} csak számítógéppel becsülhető, és $\gamma \geq 1/2$ esetén a kettő egybeesik, és az alábbi táblázattal lehet leírni a megoldásszám alakulását:



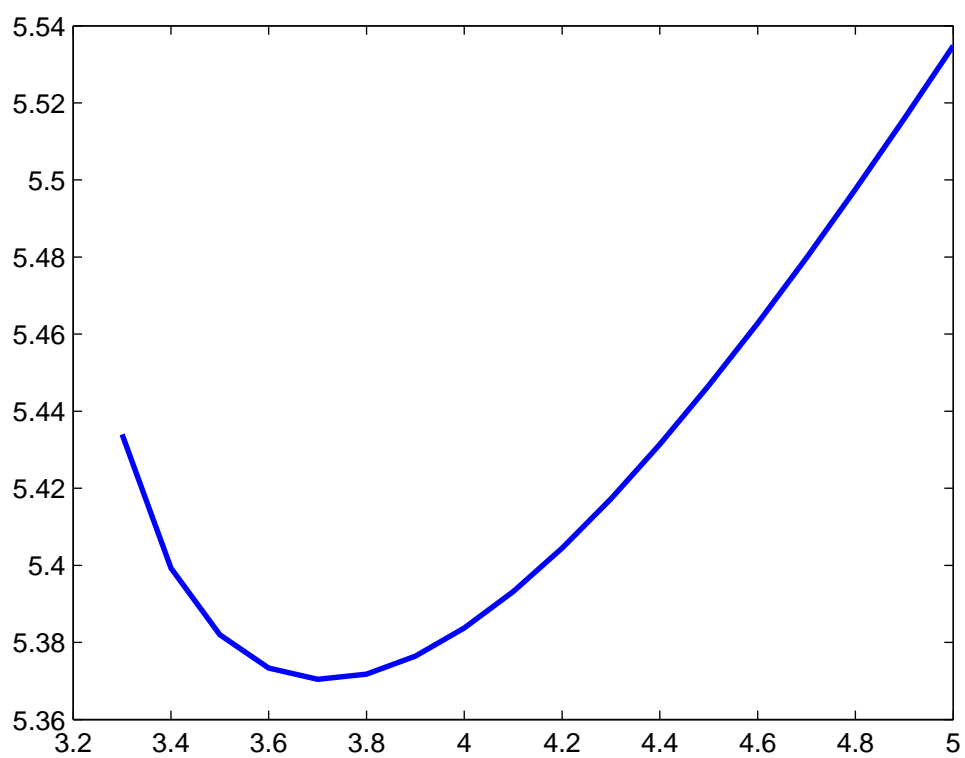
2.2. ábra. Jobb oldalt az ode45-tel, bal oldalon az integrálformulával kapott visszatérési leképezés $\gamma = 0.4$ $\beta = 1$ esetén.

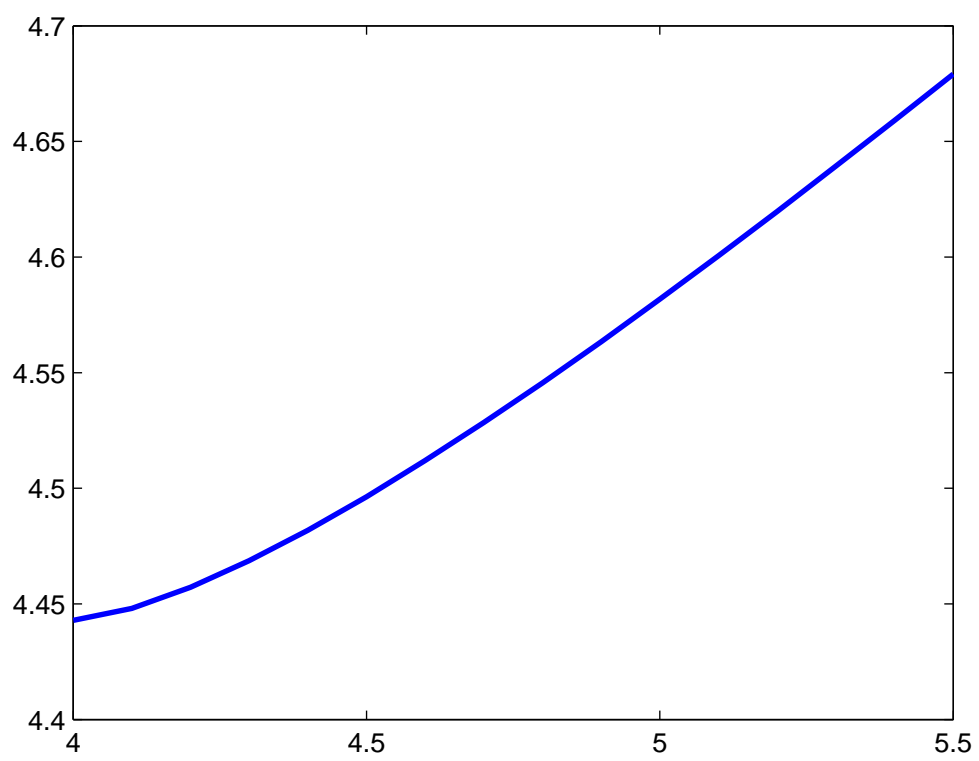
pontok száma	ode45	integrálformula
10	5 s	0.25 s
25	12 s	0.62 s
50	23 s	1.25 s
75	34 s	1.82 s
100	34 s	2.4 s

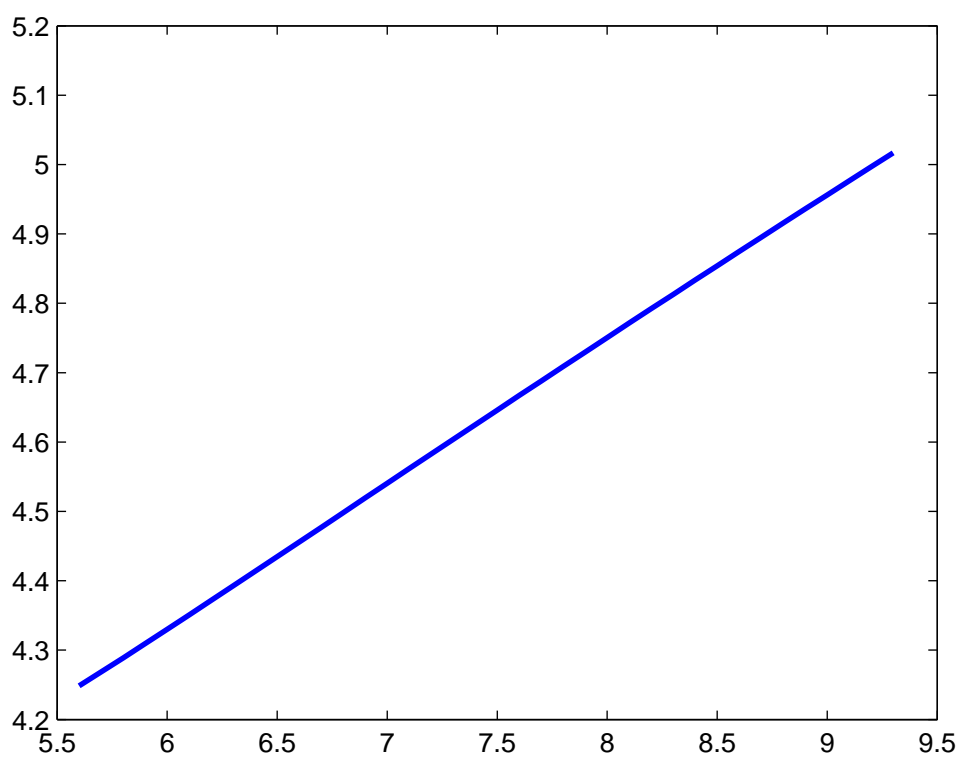
2.1. táblázat. A futásidő a pontok számának függvényében

	$R < R_{min}$	$R = R_{min}$	$R_{min} < R < R_0$	$R = R_0$	$R_0 < R$
$\gamma < 1/2$	0	1	2	2	1
$\gamma \geq 1/2$	0	1	-	-	1

2.2. táblázat. A megoldásszám γ és R függvényében

2.3. ábra. A visszatérési leképezés $\gamma = 0.3$ esetén

2.4. ábra. A visszatérési leképezés $\gamma = 0.5$ esetén

2.5. ábra. A visszatérési leképezés $\gamma = 0.7$ esetén

3. fejezet

Egy speciális szinguláris probléma

3.1. Bevezetés

A fejezet célja meghatározni az alábbi peremértékprobléma pozitív megoldásainak számát:

$$\begin{aligned}u'' + f(u) &= 0 \\ u(-R) &= u(R) = 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

ahol $f(u) = -\frac{1}{u^\gamma} + \beta$, $\gamma \in (0, 1)$ és $\beta > 0$.

Ezzel a peremértékproblémával legelőször Diaz és társai foglalkoztak ([11]) sokkal általánosabb vonatkozásban. β abban a cikkben függött a tér változótól, x -től is és a feladat egy korlátos tartományon volt kitűzve \mathbb{R}^n -ben. Belátták, hogy ha a feladatnak létezik megoldása, akkor létezik maximális megoldása is, valamint vizsgálták az energetikai funkcionál szélsőértékeinek és a maximális megoldásnak a kapcsolatát.

A $\beta(x) = \beta$ esetben azt látták be, hogy létezik egy $\beta^* > 0$ melyre az igaz, hogy ha $\beta < \beta^*$ akkor nem létezik megoldás, ha pedig $\beta > \beta^*$ akkor létezik megoldás.

Később Choi, Lazer és McKenna foglalkozott a kérdéssel [5]. Az n dimenziós eset kapcsán belátták, hogy $\gamma \geq 1$ esetén nem létezik megoldása. Valamint azt is belátták, hogy legfeljebb két dimenzióban $\beta = \beta^*$ esetén is létezik megoldása a feladatnak. Az egydimenziós eset kapcsán (mely nem más mint az (3.1) közönséges differenciálegyenlet) bebizonyították, hogy ha $0 < \gamma < 1/3$ akkor létezik $R_1 < R_2$ úgy, hogy minden $R \in (R_1, R_2)$ esetén legalább két megoldás van és $R = R_1$ esetén is van legalább egy megoldás. Valamint azt is bizonyították, hogy $\gamma = 1/2$ esetén amennyiben létezik megoldás, akkor ez egyértelmű.

[5]-ben több problémát is felvetettek, ezek közül háromra fogunk választ adni:

- Meg tud-e valaki határozni egy kritikus kitevőt, γ^* -ot, ami felett a megoldás egyértelmű?
- A kritikus kitevő alatt minden esetben több megoldást létezik?
- A megoldások maximális száma kettő, vagy előfordulhat-e több megoldás?

A következő tételt fogjuk bizonyítani, mely tétel a [19] fő állítása is egyben:

3.1.1. Tétel. *Legyen $R_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\beta^{-1/2-1/2\gamma}(1-\gamma)^{-1/2\gamma} \int_0^1 (t^{1-\gamma} - t)^{-1/2} dt$. Amennyiben $1/2 \leq \gamma < 1$ akkor $R < R_0$ esetén nincs megoldás, $R \geq R_0$ esetén pedig a megoldás egyértelmű. $0 < \gamma < 1/2$ esetén létezik $R_{min} < R_0$ úgy hogy $R < R_{min}$ esetén nincs megoldás, $R = R_{min}$ esetén létezik egyértelmű megoldás, $R \in (R_{min}, R_0]$ esetén pontosan két megoldás létezik, $R > R_0$ esetén ismételten egyértelmű megoldást kapunk.*

Ezek alapján a fenti kérdéseket meg tudjuk válaszolni:

- A kritikus kitevő, mely felett a megoldás egyértelmű, nem más mint az $1/2$.
- Igen, a kritikus kitevő alatt minden esetben több megoldást létezik.
- Igen, a megoldások maximális száma kettő, több megoldást egyetlen esetben sem kaphatunk.

A második szakaszban bemutatjuk azokat az eszközöket, melyeket felhasználunk a visszatérési leképezés jellemzéséhez. A 3. szakaszban megmutatjuk, hogy T értelmezési tartománya egy félegyenes $(p_\gamma, +\infty)$, és $T(p) \rightarrow +\infty$ ahogy $p \rightarrow +\infty$. Azt is belátjuk, hogy T -nek legfeljebb egy lokális szélsőértéke lehet, mégpedig egy minimuma. Ezek a tulajdonságok általánosabb nemlineáris f -re is beláthatóak, melyek magukba foglalják $\beta - id^{-\gamma}$ -t is. f pontos alakja csak a 4. szakaszban kap szerepet, ahol belátjuk, hogy miként függ $T'(p_\gamma)$ értéke γ -tól. Azaz belátjuk, hogy $\gamma < 1/2$ esetén negatív, $\gamma = 1/2$ esetén nulla, $\gamma > 1/2$ esetén pedig pozitív. Ezek felhasználásával egyszerűen bizonyíthatjuk Tételünket.

3.2. A visszatérési leképezés

Egyszerűen megmutatható (ld. Függelék) hogy (3.1) minden pozitív megoldása radiálisan szimmetrikus, így eleget tesz a következőknek:

$$\begin{aligned} u''(r) + f(u(r)) &= 0 \\ u'(0) &= 0, \quad u(R) = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

és fennáll az is, hogy:

$$u'(r) < 0 \quad \text{minden } 0 < r < R. \tag{3.3}$$

Jelöljük $u(r, p)$ -vel azokat az $u(r)$ megoldásokat, melyekre $u(0) = p$. Alkalmazzuk a célbalövéses módszert, ami az alábbi kezdeti érték problémát kielégítő $u(\cdot, p)$ vizsgálatát jelenti:

$$\begin{aligned} u''(r, p) + f(u(r, p)) &= 0 \\ u(0, p) &= p, \quad u'(0, p) = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Definiáljuk a visszatérési leképezést, ahogy azt korábban ismertettük:

$$T(p) = \sup\{r > 0 : u(s, p) > 0, \forall s \in [0, r)\},$$

azaz $T(p)$ nem más, mint $u(\cdot, p)$ első gyöke. Belátható (ld. Függelék) hogy bevezetve az $F(s) = \int_0^s f(t) dt$ jelölést $T(p)$ -t definiálhatjuk egy integrállal is:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}} ds. \tag{3.5}$$

Felhasználva a fenti integrál reprezentációt belátható, hogy T folytonosan differenciálható. ([5] [18]).

A definíció értelmében T eleget tesz a következő egyenletnek:

$$u(T(p), p) \equiv 0 \tag{3.6}$$

és $u(r, p) > 0$ ha $r \in [0, T(p))$.

Differenciálva (3.6)-t a következő egyenletet kapjuk T deriváltjára:

$$\begin{aligned} \partial_r u(T(p), p) T'(p) + \partial_p u(T(p), p) &\equiv 0, \\ \partial_r^2 u(T(p), p) T'(p)^2 + 2\partial_{rp} u(T(p), p) T'(p) + \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\partial_r u(T(p), p)T''(p) + \partial_p^2 u(T(p), p) \equiv 0. \quad (3.8)$$

Differenciálva (3.4)-t p szerint, és bevezetve a $h(r, p) = \partial_p u(r, p)$ és $z(r, p) = \partial_p^2 u(r, p)$ jelöléseket azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} h''(r, p) + f'(u(r, p))h(r, p) &= 0 \\ h(0, p) = 1, \quad h'(0, p) &= 0; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} z''(r, p) + f'(u(r, p))z(r, p) + f''(u(r, p))h^2(r, p) &= 0 \\ z(0, p) = 0, \quad z'(0, p) &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Differenciálva (3.4)-t r szerint, és bevezetve a $v(r, p) = \partial_r u(r, p)$ jelöléseket azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} v''(r, p) + f'(u(r, p))v(r, p) &= 0 \\ v(0, p) = 0, \quad v'(0, p) &= -f(p). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ezeket felhasználva (3.7) így írható:

$$v(T(p), p)T'(p) + h(T(p), p) \equiv 0. \quad (3.12)$$

3.3. A visszatérési leképezés jellemzése

Először meghatározzuk T értelmezési tartományát, ehhez használjuk a következő Hamilton függvényt:

$$H(r) := \frac{u'(r)^2}{2} + F(u(r)). \quad (3.13)$$

Ahol $F(u) := \int_0^u f(t)dt$.

$H'(r) = u'(r)u''(r) + f(u(r))u'(r) = u'(r)u''(r) - u''(r)u'(r) = 0$, azaz H konstans függvény.

3.3.1. Lemma. • *Tetszőleges f nemlineáris függvény esetén a visszatérési leképezés értelmezési tartománya: $D(T) = P_f := \{p > 0 : F(p) > F(s) \forall s \in (0, p)\}$*

- Ha $f(u) = \beta - u^{-\gamma}$, akkor $D(T) = [p_\gamma, +\infty)$, ahol $p_\gamma = \left(\frac{1}{\beta(1-\gamma)}\right)^{1/\gamma}$

Bizonyítás. Legyen $p \in D(T)$ és $s \in (0, p)$. Ekkor létezik $r \in (0, T(p))$ hogy $u(r) = s$. Ezzel:

$$F(s) = F(u(r)) = H(r) - \frac{u'(r)^2}{2} < H(r) = H(0) = F(p).$$

Most legyen $p \in P_f$ és az egyszerűség kedvéért jelöljük $u(r)$ -rel $u(r, p)$ -t. Belátjuk, hogy létezik $R > 0$ úgy, hogy $u(R) = 0$, azaz $p \in D(T)$. Indirekt tegyük fel, hogy $u(r) > 0$ minden $r > 0$ esetén. Könnyen látható, hogy $f(p) > 0$ mert $p \in P_f$, azaz $u''(0) < 0$, ennek következtében $u'(r) < 0$ kicsi r -ekre. Felhasználva, hogy H konstans, és $p \in P_f$, (3.13) segítségével azt kapjuk, hogy $u'(r) < 0$ minden $r > 0$ esetén. Azaz létezik $\lim_{\infty} u =: c \in [0, p)$, és (3.13) alapján $F(c) = F(p)$, ami ellentmond annak, hogy $p \in P_f$.

Most lássuk a második pontot. Egyszerű integrálással látszik, hogy $F(u) = \beta u - u^{1-\gamma}/(1-\gamma)$. f egyetlen gyöke $f_\gamma := \beta^{-1/\gamma}$, és f $(0, f_\gamma)$ -n negatív, (f_γ, ∞) -n pozitív, így F szigorúan monoton csökken f_γ -ig, majd pedig szigorúan monoton nő. $F(0) = 0$, így könnyű látni, hogy $p \in P_f$ pontosan akkor áll fent, ha p nem kisebb mint F második gyöke, ami p_γ .

□

A visszatérési leképezés határértékét a következő lemma segítségével kapjuk meg:

3.3.2. Lemma. *Ha f felülről korlátos akkor $\lim_{p \rightarrow \infty} T(p) = \infty$.*

Bizonyítás. Integrálva (3.1)-et azt kapjuk, hogy

$$-u'(r) = \int_0^r f(u(s)) ds. \quad (3.14)$$

Integrálva (3.14)-et $[0, r]$ -en és felhasználva, hogy $f(r) < \beta$ minden $r > 0$ -ra azt kapjuk, hogy:

$$u(r) \geq p - \frac{\beta r^2}{2}$$

ahol $p = u(0)$. Azaz u első gyöke nagyobb mint a jobboldali parabola első gyöke, ami azt jelenti, hogy $T(p) \geq \sqrt{2p/\beta}$ és a jobboldali kifejezés ∞ -hez tart, ahogy $p \rightarrow \infty$, így $T(p)$ is ∞ -hez tart.

□

Végül vizsgáljuk meg a visszatérési leképezés monotonitását.

3.3.3. Lemma. *Ha f konkáv függvény, akkor $T'(p) = 0$ esetén $T''(p) > 0$.*

Bizonyítás. Felhasználva (3.12)-öt azt kapjuk, hogy $T'(p) = 0$ -ból $h(T(p), p) = 0$ következik. Belátjuk, hogy $h(r, p) > 0$ minden $r \in [0, T(p))$ esetén. Ellenkező esetben felhasználva a Sturm szeparációs tételt (ld.: Függelék) azt kapnánk, hogy v -nek lenne egy gyöke h előző gyöke, és $T(p)$ között, mert v és h ugyanannak az egyenletnek a két megoldása (3.9). Ez viszont ellentmond (3.3)-nak, ugyanis $v = \partial_r u$ végig negatív $(0, R)$ -en.

Ebből azt kapjuk, hogy $z(T(p), p) < 0$ (3.10) minden megoldására. $f''(p) < 0$ így $z''(0) = -f''(p) > 0$ -ból azt kapjuk, hogy $z > 0$ a 0 egy jobboldali környezetében. Tegyük fel, hogy $z(r_1) = 0$ valamely $r_1 \in (0, T(p)]$ -re. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenleteket:

$$h'' + f'(u)h = 0 \quad \text{és} \quad z'' + \left(f'(u) + \frac{f''(u)h^2}{z} \right) z = 0$$

ezekből azt kapjuk, hogy h -nak van gyöke $(0, r_1)$ -ben (ld.: Függelék) ami nem lehetséges. Így $z > 0$ $(0, T(p)]$ -ben.

Végül $z(T(p), p) > 0$ azt eredményezi, hogy $T''(p) > 0$ felhasználva (3.8)-at (és azt hogy $v(T(p), p) < 0$).

□

3.3.1. Megjegyzés. *A Lemma azt jelenti, hogy T -nek legfeljebb egy lokális szélsőértéke lehet, mégpedig egy lokális minimuma.*

Itt jegyezzük meg, hogy a fentiekhez hasonló lemmákat bizonyított Karátson János és Simon L. Péter [22].

3.4. A Tétel bizonyítása

Ebben a szakaszban meghatározzuk miként függ $T'(p_\gamma)$ γ -tól, majd ennek segítségével bebizonyítjuk Tételünket.

Behelyettesítve $F(u) = \beta u - u^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ -t (3.5)-be, majd az integrált $[0, 1]$ -be transzformálva $t = (s/p)^\gamma$ -val azt kapjuk:

$$T(p) = \frac{1}{\gamma\sqrt{2\beta}} \int_0^1 l(t) \sqrt{\frac{p}{h(t) - p^{-\gamma}/K}} dt, \quad (3.15)$$

ahol

$$h(t) = \frac{1 - t^{1/\gamma}}{1 - t^{1/\gamma-1}}, \quad l(t) = \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1 - t^{1/\gamma-1}}} \quad \text{és} \quad K = \beta(1 - \gamma).$$

Ugyanis:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}} ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{\beta(p-s) - \frac{1}{1-\gamma}(p^{1-\gamma} - s^{1-\gamma})}} ds.$$

$t = (s/p)^\gamma$, így $ds = \frac{p}{\gamma} t^{1/\gamma-1} dt$. Ezzel:

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\frac{p}{\gamma} t^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\sqrt{\beta p \left(1 - t^{\frac{1}{\gamma}}\right) - \frac{p^{1-\gamma}}{1-\gamma} \left(1 - t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right)}} dt = \\ &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{p} t^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\sqrt{\left(1 - t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) \left(\frac{1-t^{\frac{1}{\gamma}}}{1-t^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} - \frac{1}{1-\gamma} \frac{1}{p^\gamma \beta}\right)}} dt = \\ &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1 - t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{p}{\frac{1-t^{1/\gamma}}{1-t^{1/\gamma-1}} - p^{-\gamma}/(\beta(1-\gamma))}} dt. \end{aligned}$$

T deriváltja p_γ -ban:

$$T'(p_\gamma) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{p_\gamma 2\beta}} \int_0^1 l(t) (h(t) - 1)^{-\frac{3}{2}} (h(t) - 1 - \gamma) dt =: \frac{1}{2\gamma\sqrt{p_\gamma 2\beta}} \int_0^1 I(t, \gamma) dt.$$

Ugyanis vezessük be az

$$L(p) := \frac{p}{h(t) - p^{-\gamma}/K}$$

jelölést. Ezzel:

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t) \sqrt{L(p)} dt. \\ T'(p) &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t) \frac{L'(p)}{2\sqrt{L(p)}} dt. \end{aligned}$$

Így $T'(p)$ kiszámításához $L'(p)$ -re van szükségünk.

$$L'(p) = \frac{h(t) - \frac{1}{Kp^\gamma} + \frac{p}{K}(-\gamma)\frac{1}{p^{\gamma+1}}}{(h(t) - 1/(Kp^\gamma))^2} = \frac{h(t) - \frac{\gamma+1}{Kp^\gamma}}{(h(t) - 1/(Kp^\gamma))^2}.$$

$$L'(p_\gamma) = \frac{h(t) - \frac{\gamma+1}{Kp_\gamma^\gamma}}{(h(t) - 1/(Kp_\gamma^\gamma))^2} = \frac{h(t) - \gamma - 1}{(h(t) - 1)^2}.$$

$$L(p_\gamma) = \frac{p_\gamma}{h(t) - 1/(p_\gamma^\gamma K)} = \frac{p_\gamma}{h(t) - 1},$$

ugyanis

$$p_\gamma^\gamma = \left(\left(\frac{1}{\beta(1-\gamma)} \right)^{1/\gamma} \right)^\gamma = \frac{1}{\beta(1-\gamma)} = \frac{1}{K}.$$

Így:

$$\begin{aligned} T'(p) &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t) \frac{h(t) - \gamma - 1}{(h(t) - 1)^2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h(t) - 1}{p_\gamma}} dt \\ &= \frac{1}{2\gamma\sqrt{p_\gamma}\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 l(t) \frac{h(t) - \gamma - 1}{(h(t) - 1)^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

3.4.1. Lemma. Ha $\gamma < 1/2$ akkor $T'(p_\gamma) < 0$, ha $\gamma = 1/2$ akkor $T'(p_\gamma) = 0$, ha $\gamma > 1/2$, akkor $T'(p_\gamma) > 0$.

Bizonyítás. Közvetlen számolással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I(t, \gamma) &= l(t)(h(t) - 1)^{-\frac{3}{2}}(h(t) - 1 - \gamma) = \\ &= \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \left(\frac{1-t^{1/\gamma}}{1-t^{1/\gamma-1}} - 1 \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{1-t^{1/\gamma}}{1-t^{1/\gamma-1}} - 1 - \gamma \right) = \\ &= \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \left(\frac{t^{\frac{1}{\gamma}-1} - t^{\frac{1}{\gamma}}}{1-t^{\frac{1}{\gamma}-1}} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{(1+\gamma)t^{\frac{1}{\gamma}-1} - t^{\frac{1}{\gamma}} - \gamma}{1-t^{\frac{1}{\gamma}-1}} \right) = \\ &= \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \frac{(1-t^{\frac{1}{\gamma}-1})^{3/2}}{t^{\frac{3}{2\gamma}-\frac{3}{2}}(1-t)^{3/2}} \frac{(1+\gamma)t^{\frac{1}{\gamma}-1} - t^{\frac{1}{\gamma}} - \gamma}{1-t^{\frac{1}{\gamma}-1}} = \\ &= t^{1/2-1/2\gamma} [(1+\gamma)t^{1/\gamma-1} - t^{1/\gamma} - \gamma] (1-t)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Azt kell belátnunk, hogy $\gamma < 1/2$ esetén $\int_0^1 I(t, \gamma) dt < 0$ illetve $\gamma > 1/2$ esetén $\int_0^1 I(t, \gamma) dt > 0$. Ehhez elég azt belátni, hogy amennyiben $\gamma < 1/2$ akkor $I(t, \gamma) < I(t, 1/2)$ illetve amennyiben $\gamma > 1/2$ akkor $I(t, \gamma) > I(t, 1/2)$ minden $t \in (0, 1)$, ugyanis $\int_0^1 I(t, 1/2) = 0$ -t már [5]-ben bizonyították.

Először vizsgáljuk a $\gamma < 1/2$ esetet. $I(t, \gamma) < I(t, 1/2)$ minden $t \in (0, 1)$ esetén azt jelenti, hogy:

$$t^{1/2-1/2\gamma} [(1+\gamma)t^{1/\gamma-1} - t^{1/\gamma} - \gamma] (1-t)^{-3/2} < \frac{t-1/2}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

Ezt átalakítva:

$$t^{1-1/2\gamma} [(1+\gamma)t^{1/\gamma-1} - t^{1/\gamma} - \gamma] < (t-1/2)(1-t),$$

$$t^{1-1/2\gamma} [t^{1/\gamma-1} - t^{1/\gamma}] + t^{1-1/2\gamma}\gamma [t^{1/\gamma-1} - 1] < (t-1/2)(1-t),$$

$$t^{-1/2\gamma+1/\gamma} [1-t] + t^{1-1/2\gamma}\gamma [t^{1/\gamma-1} - 1] < (t-1/2)(1-t),$$

$$t^{1-1/2\gamma}\gamma [t^{1/\gamma-1} - 1] < -t^{1/2\gamma}(1-t) + (t-1/2)(1-t),$$

$$\gamma t^{1-1/2\gamma}(1-t^{1/\gamma-1}) > (1-t)\left(\frac{1}{2} + t^{1/2\gamma} - t\right).$$

Megmutatjuk, hogy:

$$\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1-t^{\frac{1}{\gamma}-1}) > \frac{1}{2}(1-t) > (1-t)\left(\frac{1}{2} + t^{\frac{1}{2\gamma}} - t\right).$$

A jobboldali egyenlőtlenség nyilvánvaló, ugyanis $t > t^{\frac{1}{2\gamma}}$ minden $t \in (0, 1)$ esetén, ha $\gamma < \frac{1}{2}$. A baloldali egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy:

$$r(t) := 2\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1-t^{\frac{1}{\gamma}-1}) - (1-t) = 2\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}} - 1 + t - 2\gamma t^{\frac{1}{2\gamma}} > 0 \quad \text{minden } t \in (0, 1).$$

Egész megmutatni, hogy $r'(t) < 0$ ugyanis $r(1) = 0$. A derivált:

$$r'(t) = (2\gamma - 1)t^{-\frac{1}{2\gamma}} + 1 - t^{\frac{1}{2\gamma}-1}.$$

Ahhoz, hogy belássuk $r'(t) < 0$ -t elég belátnunk azt, hogy $r''(t) > 0$ ugyanis $r'(1) = 2\gamma - 1 < 0$. A második derivált:

$$r''(t) = \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right)t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} - \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right)t^{\frac{1}{2\gamma}-2}.$$

Itt $\frac{1}{2\gamma} - 1 > 0$ így $r''(t) > 0$ akkor és csak akkor, ha:

$$t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} > t^{\frac{1}{2\gamma}-2},$$

ami $t \in (0, 1)$ esetén pontosan akkor igaz, ha:

$$-\frac{1}{2\gamma} - 1 < \frac{1}{2\gamma} - 2$$

$$\gamma < 1.$$

Most vizsgáljuk a $\gamma > 1/2$ esetet. Ekkor azt kell belátnunk, hogy $I(t, \gamma) > I(t, 1/2)$ minden $t \in (0, 1)$ esetén. $I(t, \gamma) > I(t, 1/2)$ -t hasonlóan átalakítva, mint az előző esetben azt kell bizonyítanunk, hogy minden $t \in (0, 1)$ esetén:

$$\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1 - t^{\frac{1}{\gamma}-1}) < (1-t)\left(\frac{1}{2} + t^{\frac{1}{2\gamma}} - t\right).$$

Megmutatjuk, hogy:

$$\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}}(1 - t^{\frac{1}{\gamma}-1}) < \frac{1}{2}(1-t) < (1-t)\left(\frac{1}{2} + t^{\frac{1}{2\gamma}} - t\right).$$

A jobboldali egyenlőtlenség nyilvánvaló, ugyanis $t < t^{\frac{1}{2\gamma}}$ minden $t \in (0, 1)$ esetén, ha $\gamma > \frac{1}{2}$. A baloldali egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy:

$$r(t) := 2\gamma t^{1-\frac{1}{2\gamma}} - 1 + t - 2\gamma t^{\frac{1}{2\gamma}} < 0 \quad \text{minden } t \in (0, 1).$$

Elég megmutatni, hogy $r'(t) > 0$ ugyanis $r(1) = 0$. A derivált:

$$r'(t) = (2\gamma - 1)t^{-\frac{1}{2\gamma}} + 1 - t^{\frac{1}{2\gamma}-1}.$$

Ahhoz, hogy belássuk $r'(t) > 0$ -t elég belátnunk azt, hogy $r''(t) < 0$ ugyanis $r'(1) = 2\gamma - 1 > 0$. A második derivált:

$$r''(t) = \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right)t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} - \left(\frac{1}{2\gamma} - 1\right)t^{\frac{1}{2\gamma}-2}.$$

Itt $\frac{1}{2\gamma} - 1 > 0$ így $r''(t) > 0$ akkor és csak akkor, ha:

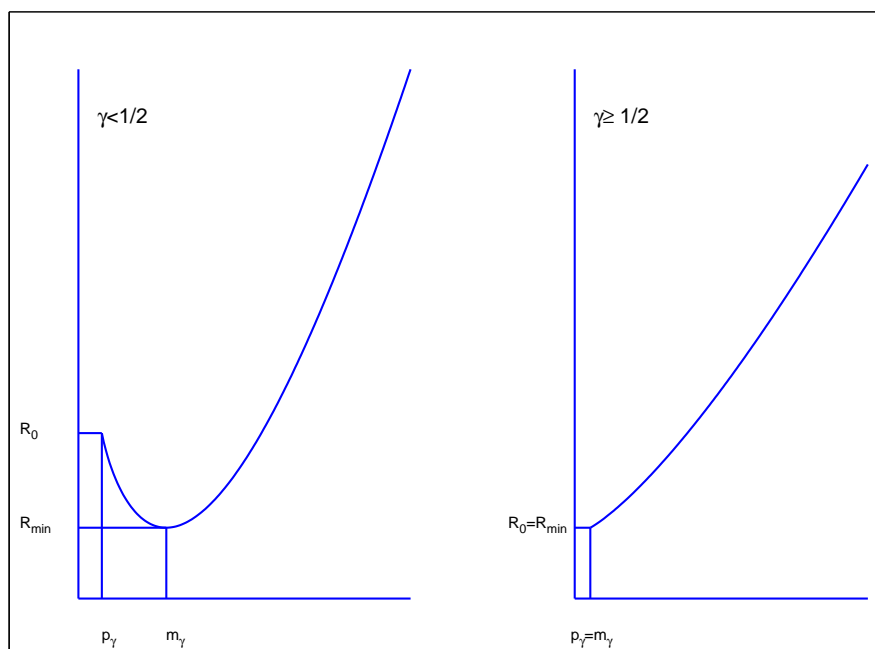
$$t^{-\frac{1}{2\gamma}-1} > t^{\frac{1}{2\gamma}-2},$$

ami a fentiek alapján igaz minden $t \in (0, 1)$, és $\gamma < 1$ esetén.

□

Felhasználva a 3.3.1 Megjegyzést, a 3.3.2 Lemmát és a 3.4.1 Lemmát már könnyen be tudjuk bizonyítani Tételünket.

Bizonyítás. [Tétel 3.1.1 bizonyítása]



3.1. ábra. A visszatérési leképezés tipikus alakja $\gamma < 1/2$ és $\gamma \geq 1/2$ esetén.

A bizonyítás fő ötlete az, hogy az 3.1 peremértékprobléma pozitív megoldásainak száma egyenlő $T(p) = R$ megoldásszámával. Felhasználva (3.5)-öt láthatjuk, hogy $R_0 = T(p_\gamma)$ (ld. 3.1. ábra). A 3.3.1 Lemma alapján tudjuk, hogy T értelmezési tartománya a $[p_\gamma, +\infty)$ félegyenes.

Ha $\gamma \geq 1/2$ akkor (3.4.1) alapján tudjuk, hogy T kezdetben növekszik és a 3.3.1 Megjegyzés miatt nem lehet maximuma. Azaz T végig nő, és az értékkészlete $[R_0, +\infty)$

felhasználva a 3.3.2 Lemmát, mely szerint $T(p) \rightarrow \infty$ ha $p \rightarrow \infty$. Így $T(p) = R$ megoldásainak száma egy, ha $R \geq R_0$, és nulla, ha $R < R_0$.

Ha $\gamma < 1/2$ akkor (3.4.1) alapján T kezdetben csökken, és a 3.3.2 Lemma alapján végtelenben végtelenhez tart. Így a 3.3.1 Megjegyzés alapján T -nek van minimuma, jelölje ezt R_{min} . Azaz T csökken R_0 -tól R_{min} -ig, majd nő végtelenig. Így $T(p) = R$ megoldásainak száma nulla, ha $R < R_{min}$, egy ha $R = R_{min}$, és kettő ha $R_{min} < R \leq R_0$ és ismét egy ha $R > R_0$.

A Tételben szereplő R_0 nem más mint a $T(p_\gamma)$ átalakítva, ugyanis behelyettesítve (3.15)-be:

$$\begin{aligned} T(p_\gamma) &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{p_\gamma}{\frac{1-t^{1/\gamma}}{1-t^{1/\gamma-1}} - p_\gamma^{-\gamma}/(\beta(1-\gamma))}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1-t^{1/\gamma}}{1-t^{1/\gamma-1}} - 1}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1-t^{1/\gamma}-(1-t^{1/\gamma-1})}{1-t^{1/\gamma-1}}}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{1-t^{1/\gamma-1}}} \sqrt{\frac{1-t^{1/\gamma-1}}{t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}}} dt = \\ &= \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{t^{1/\gamma-1}}{\sqrt{t^{1/\gamma-1}-t^{1/\gamma}}} dt = \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^{1-1/\gamma}-t^{2-1/\gamma}}} dt. \end{aligned}$$

$z = t^{1/\gamma}$, $\gamma z^{\gamma-1} dz = dt$ helyettesítéssel élve:

$$T(p_\gamma) = \frac{\sqrt{p_\gamma}}{\gamma\sqrt{\beta}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\gamma z^{\gamma-1}}{\sqrt{z^{\gamma-1}-z^{2\gamma-1}}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\beta^{1+\gamma}(1-\gamma)^{1/2\gamma}}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z^{1-\gamma}-z}} dz.$$

□

A. Függelék

Matematikai háttér

A.1. Integálformula

Tekintsük az (3.1) peremértékproblámát, és annak (3.4) megközelítését.

A visszatérési leképezést eredetileg úgy értelmeztük, hogy

$$T(p) = \sup\{r > 0 : u(s, p) > 0, \forall s \in [0, r]\},$$

azaz $T(p)$ nem más, mint $u(\cdot, p)$ első gyöke. Most belátjuk hogy bevezetve az $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ jelölést, $T(p)$ -t definiálhatjuk egy integrállal is:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}} ds.$$

Használjuk a következő Hamilton függvényt:

$$H(r) := \frac{u'(r)^2}{2} + F(u(r)).$$

Tudjuk, hogy H konstans, így $H(0) = F(u(0)) = F(p)$. Így:

$$u'(r)^2 = 2(F(p) - F(u(r))).$$

Tudjuk, hogy $u'(r) < 0$, ezzel

$$\begin{aligned} u'(r) &= -\sqrt{2(F(p) - F(u(r)))} \\ -1 &= \frac{u'(r)}{\sqrt{2(F(p) - F(u(r)))}}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Integrálva 0-tól $T(p)$ -ig:

$$-T(p) = \int_0^{T(p)} \frac{u'(r)}{\sqrt{2(F(p) - F(u(r)))}} dx.$$

$s = u(r)$ helyettesítéssel élve:

$$-T(p) = \int_p^0 \frac{1}{\sqrt{2(F(p) - F(s))}} ds,$$

azaz:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^p \frac{1}{\sqrt{F(p) - F(s)}} ds.$$

Bizonyos esetekben az $s = tp$ helyettesítést még ajánlott alkalmazni, ezzel:

$$T(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{p}{\sqrt{F(p) - F(pt)}} dt.$$

A.2. Radiálisan szimmetrikus megoldás

A.2.1. Lemma. (3.2) minden megoldása radiálisan szimmetrikus, azaz $u(l) = u(-l)$ minden $l < R$ esetén.

Bizonyítás. Mivel $u(-R) = u(R) = 0$ így létezik x_0 , hogy $u(x_0) \geq u(x)$ minden $x \in (-R, R)$ esetén és $u'(x_0) = 0$. Vezessük be a $v(x) := u(2x_0 - x)$ -et. Írjuk fel az u -ra és v -re vonatkozó kezdeti érték problémákat:

$$\begin{aligned} u''(x) + f(u(x)) &= 0 \\ u'(x_0) &= 0, \quad u(x_0) = u(x_0). \end{aligned} \tag{A.2}$$

Mivel v nem más mint u eltoltja, így v -re a következő egyenlet áll fenn:

$$\begin{aligned} v''(x) + f(v(x)) &= 0 \\ v'(x_0) &= 0, \quad v(x_0) = u(x_0). \end{aligned} \tag{A.3}$$

Azaz a két egyenlet ugyanaz, így $v(x) = u(x)$, amivel azt kapjuk, hogy u x_0 -ra szimmetrikus, és így az is igaz, hogy pozitív és negatív irányba egyszerre ér le, azaz $x_0 = 0$, vagyis tényleg radiálisan szimmetrikus.

□

A.3. Szeparációs tételek

Tekintsük a következő másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletet:

$$u'' + a_1u' + a_2u = 0 \quad (\text{A.4})$$

φ_1 és φ_2 a (A.4) két ún. **lineárisan összefüggő megoldása**, ha létezik olyan c valós szám, hogy $\varphi_1 = c\varphi_2$.

A.3.1. Lemma. *A (A.4) egyenlet megoldásainak gyökhelyei nem torlódhatnak.*

Bizonyítás. Legyen φ a (A.4) egyenlet megoldása, és tegyük fel, hogy gyökhelyeinek torlódási pontja t^* . Ebben a pontban (φ folytonossága, miatt) $\varphi(t) = 0$ és (a Rolle tétel, és φ folytonossága miatt) $\varphi'(t^*) = 0$ lenne, de mivel (A.4) megoldása egyértelmű, ezért azt kapnánk, hogy $\varphi = 0(\cdot)$, ami viszont ellentmond annak, hogy azt kizárjuk a megoldások közül.

□

A.3.1. Tétel. Sturm szeparációs tétele *Ha φ_1 és φ_2 az (A.4) egyenlet két lineárisan független megoldása, akkor ezek gyökhelyei elválasztják egymást.*

Bizonyítás. Legyen φ_1 és φ_2 a (A.4) egyenlet két lineárisan független megoldása, és jelölje φ_1 két szomszédos gyökét t_1 és t_2 . Ekkor $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = 0$, $\varphi_1(t) \neq 0$ ha $t \in (t_1, t_2)$; továbbá nyilvánvalóan $\varphi_1'(t_1) \neq 0$, $\varphi_1'(t_2) \neq 0$, ellenkező esetben ugyanis $\varphi_1 = 0(\cdot)$ lenne. Ha W jelöli a φ_1 és φ_2 megoldás Wroński-determinánsát, akkor feltehető például, hogy az pozitív definit (a negatív definitást feltételezve hasonlóan érvelhetnénk):

$$W = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1' > 0. \text{ Mivel } -\varphi_1'(t_1)\varphi_1'(t_2) > 0, -\varphi_1'(t_1)\varphi_2(t_1) > 0,$$

$-\varphi_1'(t_2)\varphi_2(t_2) > 0$. (Az első egyenlőtlenség tagadása maga után vonná, hogy a gyökök nem szomszédosak, a második és a harmadik egyenlőtlenség pedig a Wroński-determináns előjelére tett feltevésből behelyettesítéssel adódik.) Ezért (például a második és harmadik egyenlőtlenséget összeszorozva, és elosztva az elsővel kapjuk, hogy) $\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2) < 0$, tehát φ_2 -nek van legalább egy gyöke a (t_1, t_2) intervallumban. Több biztos nincs, ekkor ugyanis a két szomszédos gyökhely között az eddigiek szerint lenne φ_1 -nek gyökhelye, ellentétben azzal a feltevéssel, hogy t_1 és t_2 két szomszédos gyöke volt φ_1 -nek.

□

A.3.2. Lemma. *Legyenek $a_2, b_2 \in C([a, b])$ olyan függvények, melyekre $a_2 \leq b_2$, de $a_2 \neq b_2$. Legyenek*

$$L_1u := (au')' + a_2u \quad \text{és} \quad L_2u := (au')' + b_2u.$$

Legyen $L_1\phi = 0$, t_1 és t_2 pedig a ϕ két egymást követő gyöke. Ekkor $L_2\psi = 0$ esetén ψ függvénynek van gyöke a (t_1, t_2) intervallumban.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\psi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban. Tegyük fel indirekt módon, hogy $\psi > 0$ a (t_1, t_2) intervallumban (a $\psi < 0$ esetben hasonlóan érvelhetünk). Legyen $A := a(\phi'\psi - \phi\psi')$, ekkor $A' = (p\phi')'\psi + (p\phi')\psi' - (p\psi')'\phi - (p\psi')\phi' = (p\phi')'\psi + a_2\psi\phi + a_2\psi\phi - (p\psi')'\phi - b_2\phi\psi + b_2\phi\psi = (b_2 - a_2)\phi\psi$. Így:

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} (b_2 - a_2)\phi\psi = A(t_2) - A(t_1) = a(t_2)\phi'(t_2)\psi(t_2) - a(t_1)\phi'(t_1)\psi(t_1) \leq 0$$

ami ellentmondás. (Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk, hogy $\phi'(t_1) > 0$ és $\phi'(t_2) < 0$.)

□

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretném megköszönni témavezetőmnek, Simon Péternek, hogy mindig szakított rám időt és rengeteg hasznos segédanyaggal és tanáccsal látott el.

Köszönöm továbbá Bozó Viktornak, hogy segített remélhetően minimálisra csökkenteni a hibák számát diplomamunkámban.

A legnagyobb köszönettel azonban Édesanyámnak tartozom, aki végig segített egyetemi éveim alatt és ezért nem tudok elég hálás lenni Neki.

Irodalomjegyzék

- [Simon-Baderko] Dr. Simon László, E. A. Baderko: Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek
- [1] F.V. Atkinson, L.A. Peletier: Elliptic equations with nearly critical growth, *J. Diff. Equ.* **70**, 349-365, (1987).
- [2] H. Brezis, L. Nirenberg: Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36**, 437-477, (1983).
- [3] C. Budd: Applications of Shilnikov's theory to semilinear elliptic equations, *SIAM J. Math. Anal.* **20**, 1069-1080, (1989).
- [4] A. Castro, A. Kurepa: Radially symmetric solutions to a Dirichlet problem involving critical exponent, *Trans. Amer. Math. Soc.* **343**, 907-926, (1994).
- [5] Y.S. Choi, A.C. Lazer, P.J. McKenna: Some remarks on a singular elliptic boundary value problem, *Nonlinear Anal.*, **32** (1998) 305-314.
- [6] M.M. Coclite, G. Palmieri: On a singular nonlinear Dirichlet problem, *Comm. PDE* **14**, 1315-1327 (1989).
- [7] M.G. Crandall, P.H. Rabinowitz, L. Tartar: On a Dirichlet problem with singular nonlinearity, *Comm. PDE* **2**, 193-222 (1977).
- [8] J. Dávila, M. Montenegro: Positive versus free boundary solutions to a singular equation, Preprint.
- [9] M. Del Pino: A global estimate for the gradient in a singular elliptic boundary value problem, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **122A**, 341-352 (1992).
- [10] J.I. Diaz, J.M. Morel, L. Oswald: An elliptic equation with singular nonlinearity, *Comm. PDE* **12**, 1333-1344 (1987).

- [11] J.I. Diaz, J.M. Morel, L. Oswald, An elliptic equation with singular nonlinearity, *Comm. P.D.E.*, **12** (1987) 1333-1344.
- [12] B. Gidas, W.N. Ni, L. Nirenberg: Symmetry and related properties via the maximum principle, *Commun. Math. Phys.* **68**, 209-243, (1979).
- [13] S.M. Gomes: On a singular nonlinear elliptic problem, *SIAM J. Math. Anal.* **17**, 1359-1369 (1986).
- [14] J. Hernández: Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights. Reaction diffusion systems (Trieste, 1995), 183–197, *Lect. Notes in Pure and Appl. Math.* 194, Dekker, New York (1998).
- [15] J. Hernández, F. J. Mancebo: Handbook of Differential Equations, Stationary Partial Differential Equations Volume 3. Chapter 4: Singular Elliptic and Parabolic Equations, Elsevier B. V., 2006
- [16] J. Hernández, F. J. Mancebo, J.M. Vega: On the linearization of some singular nonlinear elliptic problems and applications, *Annales I.H.P., Analyse non linéaire*, **19**, 777-813 (2002).
- [17] J. Hernández, F. J. Mancebo, J.M. Vega: Positive solutions for singular nonlinear elliptic problems, Preprint 2002.
- [18] J. Hernández, J. Karátson, P. L. Simon: Multiplicity for semilinear elliptic equations involving singular nonlinearity, *Nonlinear Analysis*, **65** (2006) 265-283.
- [19] T. Horváth and P.L. Simon. On the exact number of solutions of a singular boundary value problem. Submitted
- [20] Z. Jin: Solutions for a class of singular semilinear elliptic equations, *Nonlin. Anal.* **31**, 475-492 (1998).
- [21] D.D. Joseph, T.S. Lundgren: Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Rational Mech. Anal.* **49**, 241-269, (1973).
- [22] J. Karátson, P. L. Simon: Bifurcations of semilinear elliptic equations with convex nonlinearity, *Electron. J. Differential Equations*, **1999** (43)(1999) 1-16.
- [23] M.K. Kwong: Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in \mathbb{R}^n , *Arch. Rational Mech. Anal.* **105**, 243-266, (1989).

- [24] A.C. Lazer, P. J. McKenna: On a singular nonlinear elliptic boundary value problem, *Proc. AMS* **3**, 720-730 (1991).
- [25] K. McLeod: Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in \mathbb{R}^n , *Trans. Amer. Math. Soc.* **339**, 495-505, (1993).
- [26] F. Merle, L.A. Peletier: Asymptotic behaviour of positive solutions of elliptic equations with critical and supercritical growth I. The radial case, *Arch. Rational Mech. Anal.* **112**, 1-19, (1990).
- [27] T. Laetsch: The number of solutions of a nonlinear two point boundary value problem, *Indiana Univ. Math. J.* **20**, 1-14, (1970).
- [28] T. Laetsch: The theory of forced, convex, autonomous, two point boundary value problems, *Rocky Mountain J. Math.* **15**, 133-154, (1985).
- [29] T. Ouyang, J. Shi, M. Yao: Exact multiplicity and bifurcation of solutions a singular equation, Preprint.
- [30] S. I. Pohozaev: Eigenfunctions of the equation $\Delta u + f(u) = 0$, *Soviet Math.* **5**, 1408-1411, (1965).
- [31] J. Shi, M. Yao: On a singular nonlinear semilinear elliptic problem, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **128A**, 1389-1401 (1998).
- [32] J.A. Smoller, A.G. Wassermann: Global bifurcation of steady state solutions, *J. Diff. Eqn.* **39**, 269-290, (1981).
- [33] S.-H. Wang, N.D. Kazarinoff: Bifurcation and stability of positive solutions of a two-point boundary value problem, *J. Austral Math. Soc. (Series A)* **52**, 334-342, (1992).
- [34] Z. Zhang: On a Dirichlet problem with singular nonlinearity, *J. Math. Anal. Appl.* **194**, 103-113 (1995).